

Hartmut REHLICH, TU Braunschweig

Spiegelzahlteiler - eine Einladung zur Entwicklung einer Mini-Theorie zu speziellen arithmetischen Symmetrien in verschiedenen Zahlssystemen.

Vorbemerkungen

Innerhalb des Hamburger Projekts zur Begabtenförderung wurde im Laufe der vergangenen mehr als 25 Jahre von Herrn Kießwetter ein breites Spektrum an Materialien, didaktischen Erkenntnissen und methodischen Handhabungen entwickelt, das eine Unterrichtsgestaltung ermöglicht, die sich an originären mathematischen Erkenntnisgewinnungsprozessen orientiert und (von ihren Grundideen her) auch für den „Normalunterricht“ an Schulen und Universitäten geeignet ist. Seine klassische Bildungsauffassung und Philosophie guter Förderung¹ haben durch ihre Stimmigkeit und ihre praktische Funktionstüchtigkeit auch meine eigenen didaktischen Vorstellungen und auch die vieler anderer entscheidend geprägt und kritisch gegenüber kurzlebigen oberflächlichen Modeströmungen und unhistorischen „Patentlösungen“ gemacht (beides scheint zur Zeit „Konjunktur“ zu haben).

Dieser Beitrag soll den Leser anregen, im Sinne dieser Philosophie zum eigenen Vergnügen allein oder mit Fördergruppen oder Schulklassen ein kleines Netz aus mathematischen Begriffen und Bezügen zu knüpfen und dadurch einen impliziten Einblick in eine – besonders in unserer Oberstufengruppe – immer wieder praktizierte Arbeitsweise zu bekommen. Daher werden im Wesentlichen nur einige schöne „arithmetische Webmuster seltener Zahlen und ihrer Verwandtschaftsverhältnisse“ gezeigt. Beweise werden nur angedeutet oder ganz dem Leser überlassen (es ist ja schließlich auch immer etwas traurig und wenig anregend, wenn schon alles fertig ist)².

Da der zu untersuchende Stoff für das unbewaffnete Auge im Dunkeln liegt (wer rechnet schon gern viel und schnell mit Papier und Bleistift in beliebigen Stellenwertsystemen), kann ein Nachtsichtgerät in Form eines eigens auf diesen Beitrag zugeschnittenen Computerprogramms von der Webseite www.remath.de heruntergeladen werden. Dieses lädt dazu ein, erst einmal in Muße lokale Muster des arithmetischen Gewebes zu betrachten und auf

¹ Detaillierteres findet man z. B. in KIESSWETTER 2010, 1992 und KIESSWETTER/REHLICH 2008, 2001

² Ausführlichere Darstellungen aus der Projektarbeit in anderen Problemfeldern findet man z.B. in REHLICH 2003, 2007, 2009

sich wirken zu lassen. Diese zeigen bald – je nach der Disposition des Betrachters – verschiedene mehr oder minder klare übergeordnete Strukturen auf, die zur Hypothesenbildung und zu Weiterem führen.

Man kann das Thema zwar sicherlich als etwas verspielt ansehen, wird jedoch bemerken, dass einige ganz typische mathematische Arbeits- und Denkweisen aktiviert werden (zu denen ja auch ganz wesentlich das kreative Spielen mit Strukturen gehört).

Das sind zunächst explorative Phasen (z.B. die Untersuchung spezieller Fälle, oder die Organisation und Durchforstung von Beispielmateriale), die den Sinn zur Musterbildung wecken und je nach der momentanen Disposition und der individuellen Intuition und Kreativität des Betrachters zu einem mehr oder minder klarem Gefühl für die Sache führen. Man kommt dann zu ersten Hypothesen und wird versuchen, diese zu beweisen oder sie zu widerlegen. Gelingt ein Beweis, so kann dessen Analyse (z. B. welche Voraussetzungen kann man abschwächen, verändern oder durch andere ersetzen, können weitere Schlüsse gezogen werden?) tiefer in das Gebiet hinein führen. Man sieht vielleicht Verallgemeinerungsmöglichkeiten und Vernetzungen. Das weitet den Blick, man sieht subtilere Muster und die Hoffnung, man könne schöne Strukturen finden, wird verstärkt und zieht wiederum explorative Phasen auf dem nun schon höheren Erkenntnisniveau nach sich. Diese Schleife kann mehrfach durchlaufen werden. So entsteht „Rohmaterial“ für eine elementarmathematische „Minitheorie“. Unter besonders günstigen Umständen, wenn ein entsprechendes Interesse, Durchhaltekraft und Ausdrucksvermögen bei genügend vielen Teilnehmern vorhanden sind, kann sogar darüber diskutiert werden, wie man derartige Arbeitsergebnisse geschlossen als „Minitheorie“ aufschreiben könnte.

Ein Motiv, das diesen Prozess in Gang hält, kann vor allem die Freude am Denken und am Erkennen³ schöner Strukturen sein, die wir fördern wollen und für die wohl die meisten, die gerne mathematisch tätig sind, einen ausgeprägten Sinn haben.

Zum Schluss dieses Abschnitts sei an einen zu berücksichtigenden Umstand bei der Organisation in unserem Sinne offener Lernprozesse erinnert. Es ist immer wieder zu beobachten – und zu akzeptieren – dass derartige Prozesse offensichtlich notwendigerweise in weiten Teilen auch durch eher alltagslogische „unscharfe“ Denk- und Anmutungsvorgänge – wie sie von POLYA (1969) beschrieben, klassifiziert und durch eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung auch als vernünftige Denkstrategien in heu-

³ Diese platonische Formulierung wurde - trotz der berechtigten möglichen Kritik - absichtlich gewählt

ristischen Prozessen erkannt werden – gesteuert werden. Ein Beispiel: A sei fraglich. A folgt B, sei klar und B sei wahr. Letzteres hilft uns eigentlich nicht weiter, aber in Polyas Wahrscheinlichkeitstheoretischer (und natürlich logisch exakter) Modellierung plausiblen Schließens wird deutlich: A ist wahrscheinlicher geworden. Im Alltagsdenken sagt man, B sei ein Indiz für A und wenn sich solche Indizien häufen, ist es nicht unvernünftig, A für immer wahrscheinlicher zu halten. Bei einer eigenen Untersuchung (REHLICH 1995) war sogar klar erkennbar, dass selbst elementare logische Regeln wie „ein einziges Gegenbeispiel falsifiziert eine Allaussage“ auch bei mathematisch Begabten (denen diese einfache Regel eine Selbstverständlichkeit ist) in der Phase des tastenden Aufbaus einer Vorstellung von einer hinreichend komplexen Sachstruktur ignoriert werden. Und auch dies ist in einem heuristischen Prozess vernünftig, denn schließlich kann z. B. eine nur kleine Modifizierung der Voraussetzungen (die wegen der noch herrschenden allgemeinen Unschärfe der Vorstellung noch nicht sichtbar ist) die vielleicht an sich gute Idee retten. Man sollte während einer vorwiegend heuristischen (Start-) Phase also weder die eigene Intuition und Phantasie durch zu große zwanghafte logische Strenge entmutigen und schon gar nicht die Denkprozesse anderer durch besserwisserisches Hineinreden vorzeitig stören (dabei gehe ich davon aus, dass das Bedürfnis zur Ergebnispräzisierung und logisch strengen Absicherung *zur rechten Zeit* von selbst kommt, oder eingefordert wird).

Das im Folgenden skizzierte Problemfeld wurde in unseren Fördergruppen nicht bearbeitet. Die Auswahl des Stoffes ist jedoch so getroffen, dass einige wesentliche Elemente und Ideen unserer Arbeit in den Fördergruppen exemplarisch deutlich gemacht werden können. Erst am konkreten Inhalt wird ja erkennbar, wie abstrakte Absichtserklärungen gemeint sind. Gewissermaßen aus psychologischen Gründen wurde die Thematik so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit, hier über Vorwissen zu verfügen, gering erscheint, wenigstens war mir selbst vorher wenig klar und ich hoffe, dass es einigen Lesern ebenso geht. Das kann wichtig sein, da zu viel strukturiertes Vorwissen einen unvoreingenommenen Blick auf Erkenntnisgewinnungsprozesse stark erschweren kann, denn vom Ergebnis her gedacht scheint einerseits oft naheliegend, was im Prozess Intuition und Glück erfordert und andererseits wird vielleicht die Kreativität behindert (da man den vermeintlich besten Weg schon zu kennen glaubt).

Eine Ausgangskonstellation öffnet ein Problemfeld

Die Zahl 1089 hat mehrere bemerkenswerte Eigenschaften. Eine davon ist $1089 \cdot 9 = 9801$. Ihre „Spiegelzahl“ ist ein Vielfaches von ihr. Eine kleinere nichttriviale Zahl mit dieser Eigenschaft findet man nur, wenn man führen-

de Nullen zulässt und z. B. an $045 \cdot 12 = 540$ denkt, aber so etwas soll bei unseren Betrachtungen erst einmal ausgeklammert werden.

Diese kuriose Eigenschaft der 1089 erscheint – zunächst und isoliert betrachtet – ein belangloser Zufall im Zehnersystem zu sein, der mit der auffälligen Primfaktorzerlegung $1089 = 3^2 \cdot 11^2$ und einer seltsamen Vielfachenliste (s. unten) wiederum „zufällig“ zusammenfällt.

1089 ·

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7 = 8 = 9 =

1089 2178 3267 4356 5445 6534 7623 8712 9801

Die Liste zeigt dem Betrachter, da das Doppelte von 1089 die Zahl 2178 und das Achtfache die gespiegelte 8712 ergibt, dass auch 2178 eine Zahl mit dieser Eigenschaft ist, zu der der Quotient $8 : 2 = 4$ gehört. Solche Zahlen werden im Folgenden als *Spiegelzahlteiler* bezeichnet. Man kann sich *überlegen*, dass es keine weiteren nichttrivialen vierstelligen Spiegelzahlteiler geben kann (rechnerisch aufwendiger aber gedanklich bequemer und daher weniger lehrreich ist es, einfach alle Zahlen durchzuprobieren).

Diese Liste zeigt ein *einfaches Bildungsgesetz*: Ausgehend von 1089 werden die ersten zwei Ziffern zyklisch modulo 10 hochgezählt, während die beiden letzten Stellen zyklisch zurückgezählt werden. Dieses Verfahren zur Nachfolgebildung wird im Folgenden „*verdrehen*“ genannt.

Einige Bemerkungen zum Ablauf und seiner Planung

Für die Gestaltung eines Aufgabenblatts für die erste Sitzung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine wäre es, den Anfang dieses Abschnitts bis zum Listeneende zu verwenden und nach weiteren (oder allen) derartigen nichttrivialen höchstens vierstelligen Beispielen zu fragen.

Man könnte aber auch, in größerer Offenheit, so anfangen: „*Im Stellenwertsystem zur Basis 7 ist 51 durch ihre „Spiegelzahl“ 15 teilbar: $51:15 = 3$. Man suche weitere derartige Beispiele.*“ Zu dieser Vorgabe kann sich ein kleiner Lesetext gesellen, der daran erinnert – oder darüber informiert – wie man die Darstellung einer Zahl in einem Stellenwertsystem in ihre Darstellung in einem anderen Stellenwertsystem umrechnet.

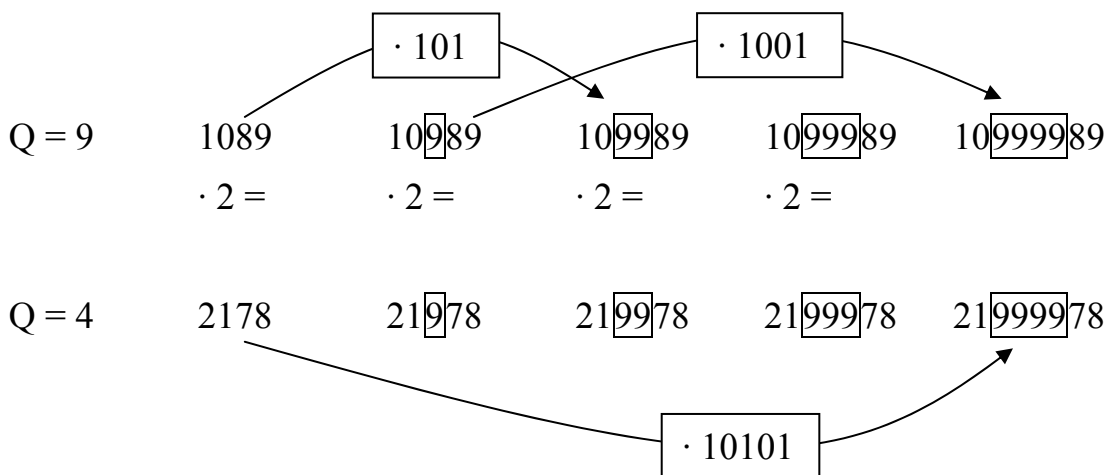
Bei der Entscheidung für eine der genannten Vorgaben (oder eine ganz andere), wird man sich an der Fördergruppe und seinen Erfahrungen orientieren. Die Arbeit in derartigen Problemfeldern im Projekt zieht sich in der Regel über mehrere Wochen hin. Eine Sitzung dauert jeweils ca. 3 Stunden und für die Folgesitzungen gilt in besonderem Maße, dass die Art und Weise der Weiterarbeit von Woche zu Woche situativ die Reaktionen der Teil-

nehmer berücksichtigt. Es handelt sich ja nicht um einen „Lehrgang“, sondern um eine offenere partnerschaftliche Entwicklungssituation (jedenfalls bei diesem Sitzungstyp, wir haben auch andere).

In diesem Sinne sollen die folgenden Ausführungen aufzeigen, welche Möglichkeiten zur Weiterarbeit durch einen gewissen Strukturreichtum innerhalb dieses Themas bestehen.

Beispiele aus dem Spektrum der Bearbeitungsmöglichkeiten

Neugierig geworden, habe ich ein kleines Computerprogramm geschrieben, das das gezielte Suchen solcher Zahlen in verschiedenen Zahlssystemen ermöglicht. Man findet mit seiner Hilfe schnell weitere Spiegelzahlteiler, zwischen denen vielfältige Teilbarkeitsbeziehungen und ein einfaches „Nachkommenschaftsverhältnis“ bestehen (Q ist der Quotient zum Spiegelzahlteiler):



Man kann beweisen, dass das mittige Einfügen von einer beliebigen Anzahl von Neunen in beide Startzahlen, im Folgenden „strecken“ genannt, stets neue Spiegelzahlteiler mit denselben Quotienten erzeugt, die paarweise wieder im Verhältnis 1:2 stehen.

Der Anfang einer weiteren verallgemeinerbaren Struktur wird durch die auffälligen Quotienten 101, 1001, 10101 innerhalb der durch Strecken entstehenden Folgen von Spiegelzahlteilern schon schwach sichtbar und deutet auch auf interessante Verhältnisse der Primzahlzerlegungen der Spiegelzahlteiler.

Das scheint bis hierher kurios, aber als isoliert dastehendes arithmetisches Muster im Zehnersystem. Noch schöner ist oft Allgemeineres. Es liegt also nahe, einen Blick in Stellenwertsysteme mit anderer Basis zu werfen.

Im Dreiersystem findet man u. a.:

$$2101_3 : 1012_3 = 2 \quad \text{also: } 64 : 32 = 2$$

$$21\boxed{2}01_3 : 10\boxed{2}12_3 = 2 \quad \text{also: } 208 : 104 = 2$$

$$21\boxed{22}01_3 : 10\boxed{22}12_3 = 2 \quad \text{also: } 640 : 320 = 2$$

Das Strecken – diesmal mit der 2 – erzeugt wieder eine unendliche Serie von Spiegelzahlteilern und die anderen Verhältnisse treten auch wieder analog auf.

Die Zahl 1012_3 ist in einem einfachen Sinne formgleich zu 1089_{10} , beide starten mit 1,0 (den kleinsten Ziffern) und enden mit den größten Ziffern des Stellenwertsystems in entsprechender Reihenfolge.

Im Stellenwertsystem zur Basis B ist die vierstellige Zahl $1.0.(B-2).(B-1)$ (die Punkte trennen die Stellenwerte) ein Spiegelzahlteiler zu dem der Quotient $B-1$ gehört. Zu allen diesen Spiegelzahlteilern kann man durch das Strecken mit $(B-1)$ beliebig viele weitere mit demselben Quotienten erzeugen.

Zum Beweis der ersten Teilaussage rechnet man leicht nach:

$$1 + (B-2) \cdot B^2 + (B-1) \cdot B^3 = (B-1) \cdot [(B-1) + (B-2) \cdot B + B^3]$$

Das ist schon ganz hübsch, da es eine Aussage für beliebige Stellenwertsysteme ist. Man kann auf die Idee kommen, dass auch andere „Zufälligkeiten“ im Zehnersystem doch auf allgemeinere arithmetische Strukturen deuten und noch einmal einen Blick in eine Vielfachenliste, diesmal im Sechzersystem, werfen (die Angabe der Basis durch einen Index wird – wenn Verwechslungen ausgeschlossen scheinen – ab jetzt weggelassen).

1056 ·

1 =	2 =	3 =	4 =	5 =
1045	2134	3223	4312	5401

Die Vielfachenliste kann hier – ebenso wie im Zehnersystem – also ebenfalls wieder durch Verdrehen (links hoch-, rechts runterzählen) erzeugt werden und man findet in der Liste mit 2134 wieder ein weiteres Beispiel für einen nichttrivialen Spiegelzahlteiler und mit 3223 einen trivialen Spiegelzahlteiler (die Zahl ist selbst spiegelsymmetrisch).

Wir gehen probeweise – ohne es nachzurechnen – für die Basis $B = 12$ von derselben Listenstruktur aus und erhalten eine Fülle weiterer zunächst hypothetischer Spiegelzahlteiler:

1	1	0	10	11	
2	2	1	9	10	
3	3	2	8	9	
4	4	3	7	8	
5	5	4	6	7	
6	6	5	5	6	
7	7	6	4	5	
8	8	7	3	4	
9	9	8	2	3	
10	10	9	1	2	
11	11	10	0	1	

Eine Nachrechnung bestätigt die Richtigkeit der Vermutung.

Es liegt also nahe, hier eine Hypothese für eine für jede Basis B gültige algorithmische Methode zur Produktion von Spiegelzahlteilern aus der „Keimzelle“ $1.0.(B-2).(B-1)$ abzuleiten und zu beweisen oder zu widerlegen.

Man sieht ja, dass dann, wenn die Vielfachenliste tatsächlich stets durch das Verdrehen entsteht, für alle Stellenwertsysteme (B sei die Basis) genau die k -fachen von $1.0.(B-2).(B-1)$ mit k teilt ($B-k$) auch wieder Spiegelzahlteiler sind.

Bei diesen ist k also ein Teiler von B und der zum Spiegelzahlteiler gehörige Quotient Q ist folglich der um 1 verminderte Koteiler zu k . Damit ist eine interessante Vernetzung zur Anzahl der echten Teiler $t(n)$ einer Zahl hergestellt: $t(n)$ gibt an, wie viele Vielfache von $1.0.(B-2).(B-1)$ Spiegelzahlteiler sind. Ist der Koteiler 2, so ist Q also 1 und es liegt ein trivialer Spiegelzahlteiler (wie 5445 im Zehnersystem) vor. Bei Zahlen mit vielen Teilern ist diese „Äquivalenzklasse“ also besonders groß.

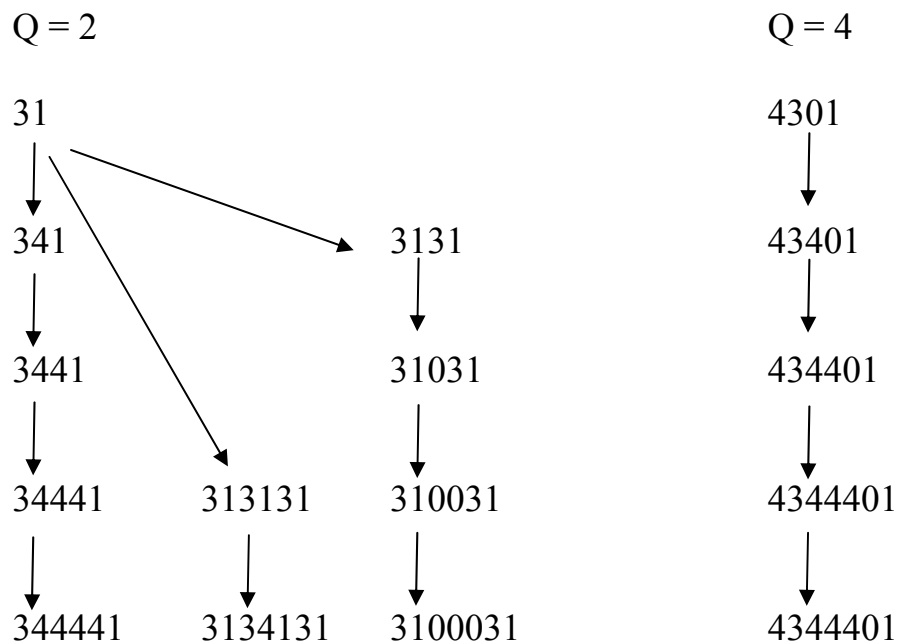
Weitere Ausweitungen, Verallgemeinerungsstränge und Muster

Das Dargestellte ist nur die „Spitze eines Eisbergs“ und die Hoffnung, auf schöne elementare und für auf viele (manches auf alle) Stellenwertsysteme verallgemeinerbare Verhältnisse zu stoßen, wird nicht getrübt. So ist zum Beispiel die in der zweiten, oben skizzierten Variante für ein Aufgabenblatt genannte Spiegelzahlteilerrechnung $51_7 : 15_7 = 3_7$ selbst Teil einer allge-

meineren Serie für Stellenwertsysteme mit ungerader Basis: $(B-2) \cdot I_B : I(B-2)_B = (B-1)/2_B$.

Verschafft man sich (z. B. mit dem angebotenen Computerprogramm) einen Überblick über alle Spiegelzahlteiler zu einer festen Basis bis zu einer bestimmten Größe, so kann man durch gewisse Operationen leicht hypothetische Stammbaumstrukturen konstruieren und nach weiteren allgemeineren Erkenntnissen streben. Zur Anregung der Phantasie seien hier zwei Ausschnitte aus derartigen Zusammenhangsnetzen wiedergegeben.

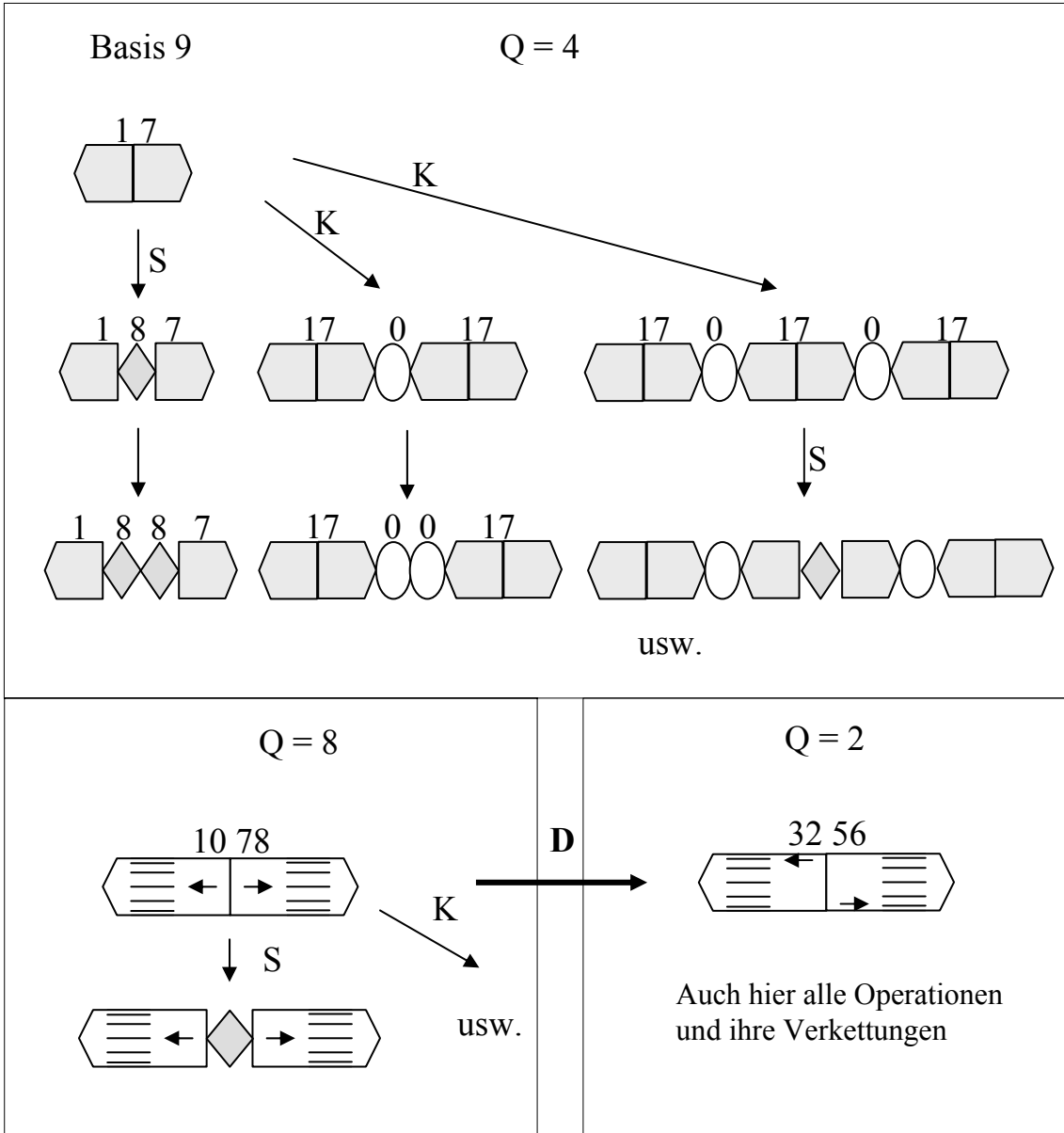
Basis 5 (Angabe des gespiegelten Spiegelzahlteilers)



Nachfolgerbildung:

- Spiegelzahlteiler n-mal hintereinanderschreiben, optional mit Nullen zwischen den Blöcken, im Folgenden „kleben“ genannt
- Das schon genannte Strecken
- Durch Kleben entstandene Spiegelzahlteiler können unter gewissen Bedingungen gestreckt werden. So entsteht z. B. auch 1 3 0 1 4 3 0 1 3 durch einmaliges Strecken der mit einer 0 dreimal verklebten Ausgangszahl 31. Gestrecktes kann natürlich auch wieder geklebt werden.

Man kann also Ketten aus den genannten Operationen bilden. Man findet so neben allgemeinen Mustern für Ausgangszahlen, allgemeine Regeln zur Nachfolgerbildung. Wie im Eingangsbeispiel schon angedeutet, scheint das Strecken wiederum interessante Teilbarkeitsbeziehungen zu erzeugen, auf die hier nicht eingegangen wird.



Wie man sieht, erzeugt die Verkettung der Operationen *strecken* (S), *kleben* (K) und *verdrehen* (D) aus wenigen Grundbausteinen (die in verschiedenen Stellenwertsystemen existieren) ganze Stammbäume von Spiegelzahlteilern. Hier ist nur ein Ausschnitt des Zusammenhangnetzes wiedergegeben. Der Spiegelzahlteiler 187 17 187 (nicht in der Graphik) zeigt eine weitere Klebemöglichkeit gestreckter Grundbausteine.

Über die hier nötigen Beweise hinaus (die mit „Schulwissen“ führbar sind), wäre im Rahmen einer kleinen Theorie natürlich auch die Frage interessant, ob man alle Spiegelzahlteiler für ein vorgegebenes Stellenwertsystem aus endlich vielen Spiegelzahlteilern durch ein gewisses Set an Operationen (vielleicht reichen schon die genannten) erzeugen kann.

Nicht nur für die Begabtenförderung

Ein übergeordnetes Ziel jeglicher Lehre ist die Förderung des selbständigen Denkens. Strunz (1968, S. 228) beschreibt es so:

„Das produktive Denken stellt die höchste Form aller Arten intellektueller Betätigung dar. Freilich beschränkt es sich in der Schule auf das Selbstfinden von Problemlösungen, die der Wissenschaft bereits bekannt und nur dem Jugendlichen neu sind. Aber dieser Unterschied ist rein sachlicher Natur und in unserem Zusammenhang psychologisch bedeutungslos. Das schöpferische Denken eines 13-jährigen Schülers, der von selbst auf die Summenformel für die Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis n kommt (ohne, dass er vorher etwas von arithmetischen Reihen gehört hätte), ist dem Denken des Wissenschaftlers verwandt, der in mathematisches Neuland vorstößt.“

Produktives Denken ist nur auf der Basis eines hinreichenden Netzes von Wissen und Können möglich und der Aufbau eines solchen Netzes ist daher selbstverständlich ein zentrales Anliegen von Mathematikunterricht. Es geht um die Balance. Die bloße Kenntnis der „Werkzeuge“ und ihrer Grundfunktionen befähigt in der Regel nicht dazu, diese in subjektiv neuen Zusammenhängen durch geeignete Kombination, geschickte Handhabung oder kreative Zweckentfremdung in den Dienst eines produktiven Denkprozesses zu stellen. Ein sinnvoller Weg zur Förderung produktiven Denkens könnte es sein, in Lehrgängen, die auch der „Wissensanhäufung“ dienen, immer wieder kleine Exkurse in (mindestens subjektives) Neuland einzuplanen, am besten ad hoc aus der Sache erwachsend. Es ist besonders günstig, wenn es sich dabei auch für den Lehrenden um Neuland handelt und dies von den Lernenden bemerkt wird. So wird nämlich der in jeder hierarchischen Struktur reflexhaft gestellten sozial orientierten Frage „was will er von mir hören“, zugunsten der sachlichen Frage „was könnte uns weiterbringen“, ein kleiner Riegel vorgeschoben.

Computerprogramme zur Produktion von Beispielmateral

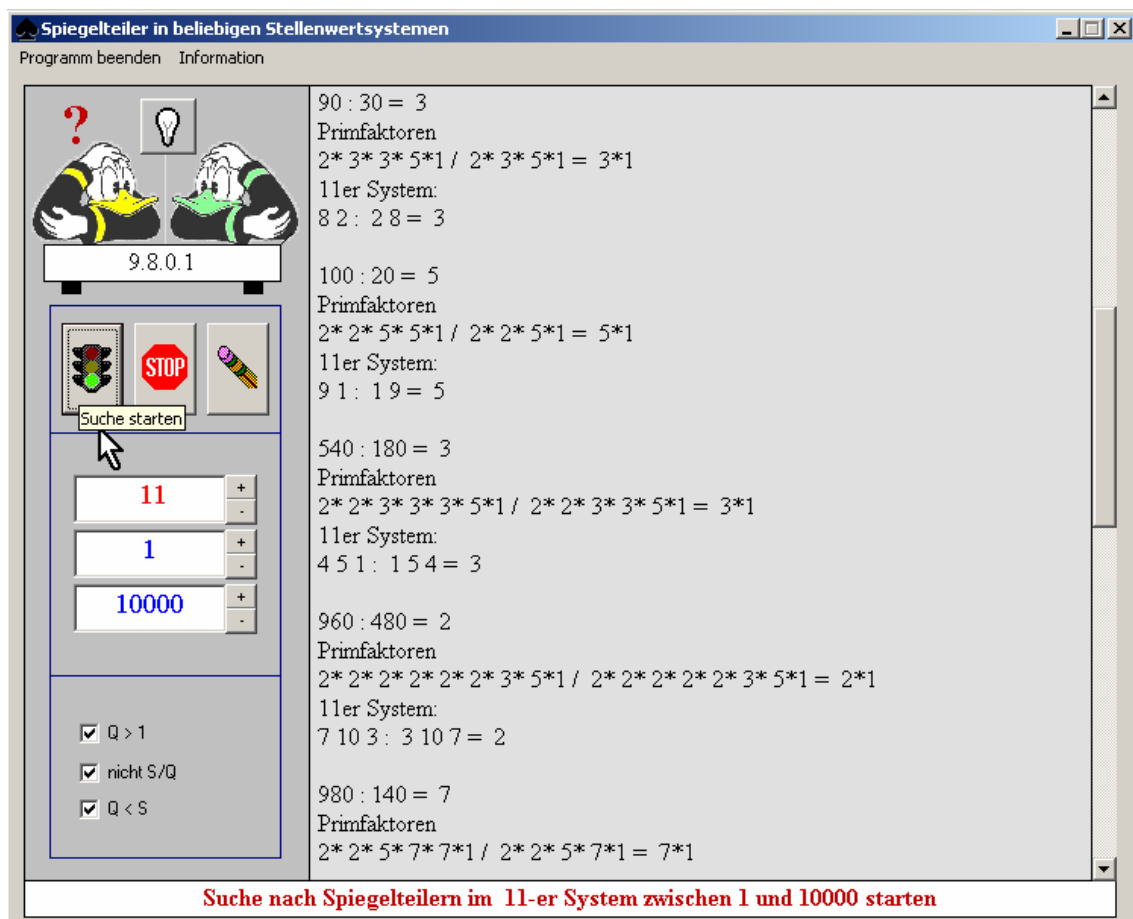
Dem Naturforscher macht es sicher Freude, verschiedene Erscheinungsformen einer neuen Pflanzenart zu sammeln und mit Muße zu betrachten. So wird ein geistiger „Abstraktionsapparat“ (der auch unbewusst arbeitet⁴) in Gang gesetzt und aus der Fülle der konkreten Erscheinungsformen kristallisieren sich abstrakte Vorstellungen übergeordneter Spezifika und Verwandtschaften zu anderen Arten heraus.

⁴ Man findet einige Gedanken dazu bei Lorenz 1973

Als Student an der Universität Hamburg, hatte ich einen Professor, der gelegentlich in analoger Weise (mit dem Computer als Botanisiertrommel) sehr erfolgreich die Untersuchung mathematischer Strukturen in der Kombinatorik betrieb (es hängt natürlich vom Thema ab, ob so etwas möglich und sinnvoll ist). Ein solcher Einsatz – der etwas völlig anderes ist, als die Verwendung oft fragwürdiger Lernprogramme oder bloßer Illustrationsprogramme oder gar die Anpassung der Lerninhalte an die verfügbare Technik, kann das produktive Denken anregen.

Das hier verwendete Freeware-Programm kann man von der Internetseite www.remath.de herunterladen. Man findet dort weitere Beispiele für derartige Programme, die ich z. T. für die Begabtenförderung, Schüler an allgemeinbildenden Schulen und für Studenten (für die Seminararbeit oder kleine Bachelorarbeiten mit „Knobelcharakter“) produziert habe.

Die folgende Abbildung zeigt die Oberfläche dieses selbsterklärenden Programms.



Man sieht bei diesem Bildschirmausdruck Ergebnisse der Suche nach Spiegelzahlteilern im Elfersystem. Die Ergebnisse werden, der Größe nach sortiert, als Divisionsaufgaben angezeigt.

Ganz zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass auch die bekannte Produktionsmethode der 1089 aus einer beliebigen dreistelligen Zahl, bei der sich die erste und letzte Ziffer unterscheiden (man spiegele diese Zahl und bilde die Differenz – die man als dreistellige Zahl, also nötigenfalls mit einer führenden Null, auffasst – und addiere zu dieser Differenz ihre Spiegelzahl) in anderen Stellenwertsystemen analog funktioniert:

$$\begin{array}{llll} 216 & \text{wird zu} & 612 - 216 = 396 & \text{wird zu} & 396 + 693 = 1089 \\ 102 & \text{wird zu} & 201 - 102 = 099 & \text{wird zu} & 099 + 990 = 1089 \\ 354_7 & \text{wird zu} & 452_7 - 254_7 = 165_7 & \text{wird zu} & 165_7 + 561_7 = 1056_7 \end{array}$$

Literatur

- Kießwetter, K. (2010). Materialien á la Polya. In: MU, Jahrgang 56, Heft 3, Teil I. Friedrich-Verlag.
- Kießwetter, K., Rehlich, H. (2008). Das Heureka-Prinzip der Förderung von mathematisch besonders begabten Mittelstufenschülern. In: Fuchs/ Käpnick, Mathematisch begabte Kinder. Band 8 der Schriftenreihe Begabungsforschung des ICBF Münster/Nijmegen, LIT Verlag Dr. W. Hopf, Berlin 2008.
- Kießwetter, K., Rehlich, H. (2001). Computerspielende Motivation für Theoriebildung in der Elementarmathematik, In: MU, Heft 4, 2001. Friedrich Verlag
- Kießwetter, K. (1992). Mathematische Begabung – über die Komplexität der Phänomene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen. In: MU, Jahrgang 38, Heft 1. Friedrich-Verlag.
- Lakatos, I. (1979). Beweise und Widerlegungen. Braunschweig. Vieweg.
- Lorenz, K. (1973). Die Rückseite des Spiegels. München: Piper & Co.
- Polya, G.(1969/75): Mathematik und plausibles Schließen. Basel: Birkhäuser. Bd 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. Bd. 2: Typen und Strukturen plausibler Folgerung.
- Rehlich, H. (2003). Ideen zur Organisation entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht. In: MU, Jahrgang 49, Heft 1, 2003. Friedrich-Verlag.
- Rehlich, H. (2007). Zur Konstruktion extremaler Efron-Würfel-Ringe. Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft Hamburg, Band 26, S. 27-42.
- Rehlich, H. (2009). Graphen-Boss-Puzzle – das 15er Spiel auf allgemeinen Spielgraphen, eine durch die starre Schiebemechanik des Ausgangsspiels vorgegebene Einschränkung wird aufgelöst. In Schiemann, S. Talentförderung Mathematik, Tagungsband anlässlich des 25-jährigen Jubiläums der Schülerförderung. Schriftenreihe des ICBF Münster/Nijmegen 2009.
- Rehlich, H. (1995). Begabungsausprägungen im Bereich der Mathematik - Modellierungsansätze zur Verbesserung der Querdifferenzierung im Schulunterricht. Dissertation, Universität Hamburg, 1995.