Frobenius-Zahl (Frankierungsproblem) für arithmetische Folgen

Satz: Gegeben seien s+1 natürliche Zahlen (man kann an Briefmarkenwerte denken), die eine arithmetische Progression bilden: *a*, *a*+*d*, *a*+2*d*, ... *a*+*sd*, mit $a,s,d \in IN$ und $ggT(a,d)=1$.

Die kleinste Zahl, die nicht in der Form $N=\lambda_0 a+\lambda_1(a+d)+...\lambda_s(a+sd)$ darstellbar ist (die sog. Frobenius-Zahl) ist $F(a,a+d,...a+sd)=\left\lceil \frac{a-1}{s} \right\rceil a+(a-1)(d-1)-1$.

Beweis: (Illustriert am Beispiel (7, 12, 17) , also mit a = 7, d = 5, s = 2.)

Die natürlichen Zahlen sind ab der Stelle lückenlos darstellbar, ab der alle Zahlen für jede Restklasse modulo *d* lückenlos darstellbar sind. Im folgenden sei *n* die Anzahl der geklebten Marken, also die Summe der λ_i . Allein diese Summe bestimmt den Rest der dargestellten Zahl modulo *d*.

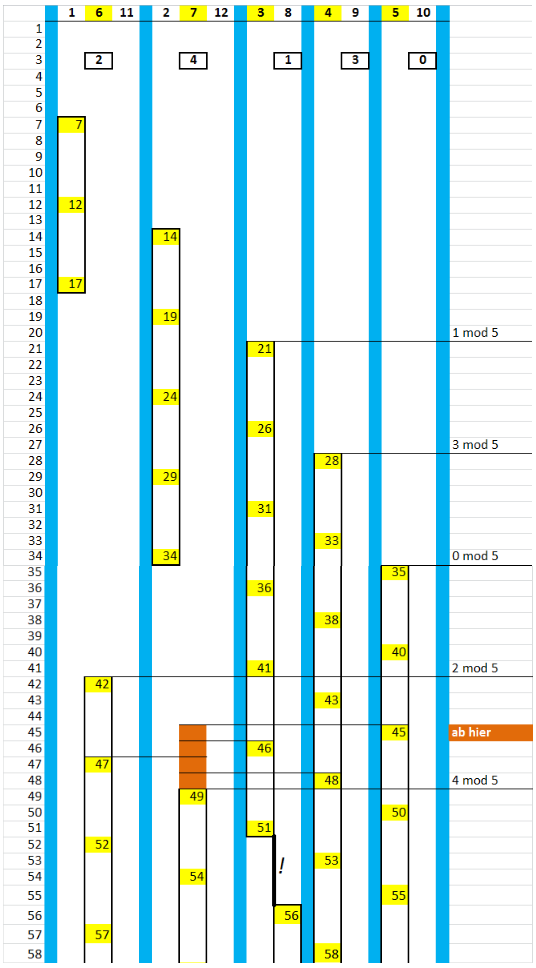
Lückenlosigkeit in den Resten heißt:

$$n(a+sd)+d \geq (n+d)a$$
$$\Leftrightarrow nsd+d \geq ad$$
$$\Leftrightarrow ns+1 \geq a$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{a-1}{s}$$

Für das gewählte Beispiel ist die Folge der $N \equiv 1 \bmod 5$ die erste sich schließende Restefolge und $N \equiv 4 \bmod 5$ die letzte.

Ab der kleinsten natürlichen Zahl *n*, die $\frac{a-1}{s}$ übersteigt, können also alle Zahlen der Restklasse $N \equiv an$ modulo *d* dargestellt werden. Genau für *d*-1 geklebte Marken werden folglich alle Zahlen aller Restklassen darstellbar (wegen der Teilerfremdheit von *a* und *d* durchlaufen die Vielfachen von a also nacheinander alle Reste modulo *d*). Das kleinste n, für das sich also alle *N* mit beliebigem Divisionsrest darstellen lassen ist daher

$$n=\left\lceil \frac{a-1}{s} \right\rceil+(d-1)$$



Da sich hier die Lückenlosigkeit für den letzten Rest ergibt, waren alle anderen schon vorher lückenlos und man kann auch die (*d*-1) Vorgänger (im Beispiel 45 bis 48) von *na* darstellen. So erhält man $F(a,a+d,...a+sd)=\left(\left\lceil \frac{a-1}{s} \right\rceil+(d-1)\right)\cdot a-(d-1)-1$ und damit die Behauptung. **qed**

Anmerkung: Für *s* = 1 ergibt sich das bekannte Ergebnis, dass man bei der Vorgabe nur zweier Marken ab einschließlich *S* = (*a*-1)(*b*-1) alle Zahlen darstellen kann, während man bei der Vorgabe einer unendlichen Markenfolge ab S = (*a*-1)(*b*-1-*a*) alle Zahlen darstellen kann.