Karl Kießwetter / Hartmut Rehlich

Computerspielende Motivation für Theoriebildung in der Elementarmathematik

1. Über Unsinn und Sinn des Computereinsatzes in einem offenen Mathematikunterricht

1A. Meta-Reminiszenzen und Positionierungen des älteren der beiden Autoren:

Die derzeit weitverbreitete, modische und vielfach unkritische Euphorie hinsichtlich der didaktischen Möglichkeiten von Computer und Internet erinnert fatal an den seinerzeitigen Mengenlehreboom. Heute wie damals in Massen und mehr als maßvoll beteiligt sind und waren Mathematikdidaktiker, Lehrer, Kultusministerien, Eltern, Verlage und Presse. Was hinsichtlich der heutigen Computermanie noch aussteht ist die unvermeidbare Ernüchterung, die dann hoffentlich nicht so heftig ausfallen wird wie die seinerzeitige, in deren Folge ja auch viele gute der damaligen, also dem Mengenkonzept verpflichteten Ideen aufgegeben wurden.

Wen diese Analogiebetrachtung noch nicht überzeugt, der schaue sich an, was sich im Moment auf dem parallelen „Neuen Markt" abspielt, der ebenfalls erst einmal viel zu hoch „gepuscht" worden ist – aus hinter raffinierten Begründungen versteckten ökonomischen Gründen, oder weil unsere schnellebige Gesellschaft immer wieder neue Götzen braucht?

Auch wenn die Mathematikdidaktik noch sehr jung ist, besteht doch auch schon bei ihr die Möglichkeit, unter dem angesprochenen Aspekt aus der eigenen Geschichte zu lernen. Zudem sollte man sich einige wissenschaftssoziologische Erkenntnisse zu eigen machen, wie sie z.B. und fachbezogen von Bettina Heintz in dem lesenswerten Buch „die innenwelt der mathematik" zusammengetragen wurden. Insgesamt sollte man dadurch eine kritische Distanz zu einigen der derzeit überschwappenden mathematikdidaktischen Trends gewinnen können - und sich wappnen vor sich modisch zu sehr in den Vordergrund drängenden zukünftigen.

1B. Die beiden Autoren dieses Artikels haben sich in vielen praxis- und detailorientierten Diskussionen eine kritisch abwägende und deshalb vermutlich auch einigermaßen ausgewogene Einstellung zum Computereinsatz in einem Mathematikunterricht abgerungen, der primär auf eigenständige Produktionsprozesse bei den beteiligten Jugendlichen aus ist. Hier dazu einige Aspekte:

Zumindest die älteren der renommierten und forschenden Mathematiker sind ohne Computer so gut geworden. Die Frage, die hier primär zu stellen ist, lautet nicht, ob sie mit schon im Grundschulalter benutzten Computerlernprogrammen noch besser geworden wären, sondern, ob ihnen nicht etwas gefehlt hätte, wenn sie u. a. weniger mit Bauklötzen gespielt und weniger mit Papier gefaltet hätten. Vielleicht – und wir selbst sind sogar davon überzeugt – hat ihnen ja die konkrete und „gefühlte" Erfahrung der Art, aus den Klötzen ein Haus gestalten, dieses als ganzes dann zu einer anderen Stelle tragen und dort als Element eines Bahnhofsdorfes verwenden zu können, zu einer schnelleren und besseren Superzeichenbildung, also zur Bildung zusammengesetzter größerer Einheiten verholfen, wie sie in der Mathematik unverzichtbar sind, - und vielleicht hat ihnen ja ein bestimmtes Falten von Papier für die Gestaltung von kleinen Papiertischdeckchen eine immer wieder hilfreiche Assoziation von Symmetrien und von deren Eigenschaften erleichtert – und vielleicht sogar an entscheidenden Stellen provoziert? Diese unsere Beispiele beziehen sich nur auf zwei von enorm vielen Erfahrungen, die Kinder, Jugendliche und Erwachsene mit den Händen, beim Gehen, beim Spielen mit ihrer unmittelbaren Umwelt machen können - und die schon immer Ausgangspunkt und Hilfsmittel bei wissenschaftlichen Modellierungen waren und sind. Es ist naiv und gefährlich, einfach davon auszugehen, daß Computerbilder solche konkreten Erfahrungen ersetzen können.

Man könnte C.F.Gauß und die Aufwendigkeit seiner Rechnungen als Beispiel dafür anführen, daß eine Verfügungsmöglichkeit über Computer diesem Genie mehr Zeit für die Produktion weiterer wichtiger mathematischer Sätze gegeben hätte – und diese Argumentation hat eine unmittelbare Plausibilität. In der „historischen Einführung“ zu dem als Ostwalds Klassiker erschienenen Bändchen über das Mathematische Tagebuch von Gauß steht jedoch auch „*Wie Klein bereits bemerkte, erkannte Gauß beim Zahlenrechnen Gesetze, die er dann in harter Arbeit bewies“.* Vielleicht hätte also Gauß ohne die ihm unangenehmen Rechnereien zwar mehr Muße für mathematische Arbeit gehabt, jedoch weniger, und vor allem weniger drängenden Anlaß und Inhalt für eine solche Arbeit – und vermutlich würden heute einige der Ergebnisse Gaußscher Arbeit fehlen. Vereinfachungen und Beschleunigungen durch die Verwendung von Computerprogrammen könnten entsprechend Kindern die Chancen dafür nehmen, auf ihrem Niveau hart nachdenken zu müssen – und solches könnte sogar desto mehr gelten, je besser solche Programme von Medienwissenschaftlern beurteilt werden.

Sehr plausibel für die Verwendung von Computerprogrammen für den Mathematikunterricht klingt auch das Argument, daß diese „vorbildliche“ bildliche Repräsentationen liefern, die sonst nicht in diesem Maße zu realisieren sind. Das ist sicher weitgehend richtig, aber ist es insbesondere unter langfristig orientierten Aspekten auch stets förderlich? Auch hierbei werden dem Jugendlichen nämlich Chancen vorenthalten, z.B. die, solche bildlichen Repräsentationen intuitiv und selbst zu finden, aber auch weitgehend die Chancen, in bestimmten Situationen andere, seiner - eventuell auch nur momentanen - Situation gemäße Repräsentationen auszubilden. Zudem**:** Daß die in Computerprogramme jeweils integrierten bildlichen Repräsentation stets für alle Programmbenutzer am besten geeignet sind, kann nur jemand behaupten, der zu wenig über die Verschiedenheit von mathematischen Begabungsausprägungen weiß und/oder sich selbst und die gegenüber dem enorm vielfältigen, in hochkomplexer Vernetzung stattfindendem menschlichen Denken sicher arg beschränkten „sequenziellen“ Möglichkeiten des heutigen Computers zu sehr „zum Maß aller Dinge“ nimmt.

Nach den bisherigen Bemerkungen bedarf es natürlich einer besonderen Begründung, weshalb, wo und wie auch wir den Computer verwenden – und dies dann auch noch in einem sehr offenen Unterricht zur didaktischen und inhaltlichen Hilfe für das Ingangsetzen und Inganghalten von Theoriebildungsprozessen in den Köpfen der von uns betreuten Jugendlichen. Unsere zentralen Argumente sind dabei:

(1) Man kann den Computer so programmieren, daß er zum Partner bei Strategiespielen wird, die beim engagierten Spieler immer wieder und mit der Zeit immer mehr mathematikorientierte Überlegungen auslösen.

(2) Man kann zudem vorsehen, daß für den Spieler die Möglichkeit besteht, Vorgaben und Spielregeln in einem gewissen Rahmen zu variieren, was dann den Anstoß zur Öffnung eines Theoriebildung provozierenden mathematischen Problemfeldes liefert.

(3) In Computerprogrammen kann mehr an Vernetzungskomplexität untergebracht werden, als das kapazitätsarme menschliche Arbeitsgedächtnis auf einmal aufnehmen kann. Dadurch werden Superzeichenbildungen angeregt und Bausteine für eine Theoriebildung geschaffen.

(4) Durch Computerprogramme kann nicht nur komplexe Realität simuliert werden, diese Simulationen bieten zudem Möglichkeiten, welche in vergleichbarer Art in der Realität nicht existieren, nämlich die des fast beliebigen Zeitraffens und der fast beliebig oftmaligen Wiederholung. Zudem ist der Übergang zwischen Realität und

Computersimulation für den Spieler so fließend, daß im Computer für die didaktisch orientierte Vorgabe strukturreiche Vernetzungsrealitäten einer Art geschaffen werden können, die so in der eigentlichen Realität praktisch nicht vorkommt.

(5) In unserem Sinne wird der Computer auch nicht bloß phasenweise zur direkten Steuerung von Lernprozessen verwendet, sondern ausschließlich als attraktives Hilfsmittel, das man einbeziehen kann, aber nicht muß. Es ist in diesem und im Sinne von (4) eine Erweiterung der Möglichkeiten, welche man in „Papier und Bleistift“ schon immer hatte. Der vorgesehene Unterricht bleibt natürlich auch insofern offen, als die beteiligten Jugendlichen zwischen dem spielerischen Informationsgewinn am Computer und der Arbeit mit Papier und Bleistift hin und her wechseln können. In Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und der Routine dieser Jugendlichen wird sich dann vielleicht ein beispielnahes Hypothesenbilden und -prüfen und damit ein weiteres und öfteres Benutzen des Computerspiels ergeben, vielleicht aber auch ein in qualitativ höherem Maße mathematische Theorie produzierendes Agieren auf dem Papier unter Verwendung von geeignet abstrahierten neuen Begrifflichkeiten – vielleicht aber auch noch etwas ganz anderes. Der Anzahl verschiedener Bearbeitungs- und Fortsetzungsmöglichkeiten sind kaum Grenzen gesetzt. Insgesamt gibt die vorgesehene Computerbenutzung keinen engen Weg vor, vielmehr bereichert sie das Spektrum von Möglichkeiten für selbständig eingeholten Informationsgewinn in Bereichen, wo man sich ohne Computer zumindest äußerst schwer tun würde. Und die vorgesehene Art der Benutzung des Computers verarmt nicht die Möglichkeiten für eigenständige langfristig orientierte Lernprozesse.

2. Bemerkungen über das Bild von Mathematik bei kreativen Mathematikern

2A. Extrakt aus den folgenden Zitaten und Hinweisen:

Die Arbeit eines Mathematikers ist vergleichbar der eines Bildhauers, der Skulpturen herausarbeitet, oder der eines Musikers, der Tonkompositionen gestaltet. Das Ergebnis seines Tuns sind Theorien, und damit u.a. Verbindungsnetze für Begriffe, Problemfelder, Beweisketten, Algorithmen usw.

Mathematik ist nicht in erster Linie das Lösen von (vorgegebenen lokalen) Problemen.

2B. Explizierende Literaturstellen und Bemerkungen:

Philip J. Davis, einer der beiden Autoren des Buches „Erfahrung Mathematik“ nimmt in einem Heft der DMV-Mitteilungen kritisch Stellung zu dem derzeitigen Wettbewerbsboom, dem sich inzwischen ja leider auch viele Mathematiker ausgeliefert haben. Wir zitieren Davis:
„Mein eigener Haupteinwand gegen die Claypreise ist, daß sie die Natur der mathematischen Forschung verzerren, ... (sie) verzerren das öffentliche Verständnis von Mathematik, indem sie das Lösen von Problemen auf Kosten des Bildens, der Ausarbeitung und Anwendung von Konzepten betonen.“

In dem gleichen DMV-Heft ist ein mathematikgeschichtliche Zusammenhänge beschreibender und interpretierender Artikel über „Felix Klein und das Riemannsche Erbe“ abgedruckt. In diesem zitiert der Autor R. Remmert, einer der renommierten deutschen Mathematiker der Gegenwart, eine Äußerung von Hermann Weyl über das Ikosaeder-Buch von Felix Klein. Danach nannte es Weyl
„eine wunderbare Symphonie, in welcher Geometrie, Algebra, Funktionentheorie und Gruppentheorie zu einer vieltönenden, aber von tiefsten Zusammenhängen durchwalteten Melodie zusammenklingen“

Die Leserinnen und Leser dieser Zeilen besitzen vielleicht den Band „Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften“ der Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik oder haben zumindest schnellen Zugriff zu diesem. Darin stellt Andreas Dress, den man zu den kreativsten der uns näher bekannten Mathematiker zählen kann, in seinem Beitrag „Beweis und Begriff – Zur Kreativität in der Mathematik“ wesentliche Elemente seines Bildes von Mathematik vor. Er schreibt: *„Was spielt sich eigentlich ab, wenn in der Mathematik Vermutungen aufgestellt und Begriffe geformt werden? Begleitet wird das jedenfalls in aller Regel von dem Gefühl, welches man auch einem Bildhauer unterstellt, der aus einem unbehauenen Stein eine Skulptur herausarbeitet: ..(dabei) sieht er sich selbst von der für ihn bereits vorhandenen Gestalt in Zwang genommen, der er nur noch zum Ans-Licht-Treten verhelfen muß.“*

In dem gleichen Band hat der ältere der beiden Autoren dieses Beitrags in dem Artikel „Theoriebildung und Kreativität in der Mathematik“ versucht, den Ablauf von mathematikgenerierenden Theoriebildungprozessen zu modellieren, und dies nicht primär unter wissenschaftstheoretischen Gesichtpunkten, sondern eher als fundierende Hilfestellung für eine möglichst direkte Verwendung in der Förderpraxis für Jugendliche – u.a. bei der motivationsfördernden Gestaltung von geeigneten Materialien und Arbeitsumgebungen. Dazu ist er von einem selbstorganisierenden System ausgegangen, zu dem insbesondere die beteiligten mathematikgenerierenden Personen, das entstehende Ideen- und Wissensnetz in seinen verschiedenen und zunehmenden Ausprägungen, und die gegenseitigen Wechselwirkungen gehören.
Dabei hat er dann die Art der Reaktionen der agierenden Personen auf den jeweiligen Momentanzustand dieses Ideen- und Wissensnetzes hervorgehoben, zu denen zum einen gehört, daß diese agierenden Personen ein Empfinden für übergreifende mathematische Einfachheit und eine damit verbundene Schönheit entwickeln, und zum anderen, daß sie aus dem vorhandenen Netz Informationen über die Zuordnung von größerer oder kleinerer Plausibilität für die enthaltenen Hypothesen zusammenstellen und ihre weiteren Netzverbesserungsversuche und –aktionen daran ausrichten. Zum letzten Aspekt hat der bekannte G. Polya faszinierende und umfassende Überlegungen und Darstellungen geliefert. Was sehr verwundert, und dieses Wort drückt die dabei wirksamen Empfindungen und Überlegungen eigentlich viel zu harmlos aus, ist der Sachverhalt, daß dieser enorm wichtige Aspekt des Reagierens und Gesteuertwerdens der agierenden Personen auf bzw. durch den momentanen Zustand ihres Ideen- und Wissensnetzes sowohl von den sich mit Problemlösen oder anderen kreativen Prozessen beschäftigenden Mathematikdidaktikern, als auch von Psychologen zumeist gar nicht oder viel zu wenig berücksichtigt wird – und dies, obwohl G. Polya immer wieder in die Literaturlisten einbezogen wird. Hat man die Bücher von Polya nicht richtig gelesen, oder – und das scheint noch wahrscheinlicher – die Besonderheit seines Beitrags zum detaillierten und didaktisch orientierten Durchdringen von im eigentlichen Sinne mathematikproduzierenden Prozessen nicht verstanden? – oder hat man Polyas Modellierungsbeitrag gar beiseitegeschoben, weil er für die in unserer heutigen (Medien-)Gesellschaft bevorzugte Art von Wissenschaftlichkeit ein zu hohes Maß an Multivariabilität aufweist?

3. Was hat all dies mit konkretem Mathematikunterricht zu tun?

Unser didaktisches Konzept bei der Förderung von mathematisch begabten und interessierten Schülerinnen und Schülern nach dem „Hamburger Modell“ besteht insbesondere darin, im elementarmathematischen Bereich Forschungssituationen zu simulieren und/oder auch original zu gestalten. Dabei stehen Prozesse und nicht Inhalte im Zentrum der Bemühungen – und außerdem und nicht zuletzt die nur langfristig erreichbaren Ziele. Solche sind z.B. der Erwerb von heuristischen Handlungsmustern und die dann zum einen spielerisch-freie und im notwendigen Wechsel damit aber auch logisch-gebundene Verfügbarkeit über diese und andere in kreativen mathematischen Prozessen benötigten Handlungsmuster. Handlungsmuster und Verfügbarkeit werden nicht in irgendeiner Weise „gelehrt“, sondern von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern in geeignet vorgegebenen und provozierenden Konstellationen weitgehend selbständig entwickelt und zudem in weiteren und ähnlichen Konstellationen als erfolgsträchtig erfahren und dadurch „eingeübt“.

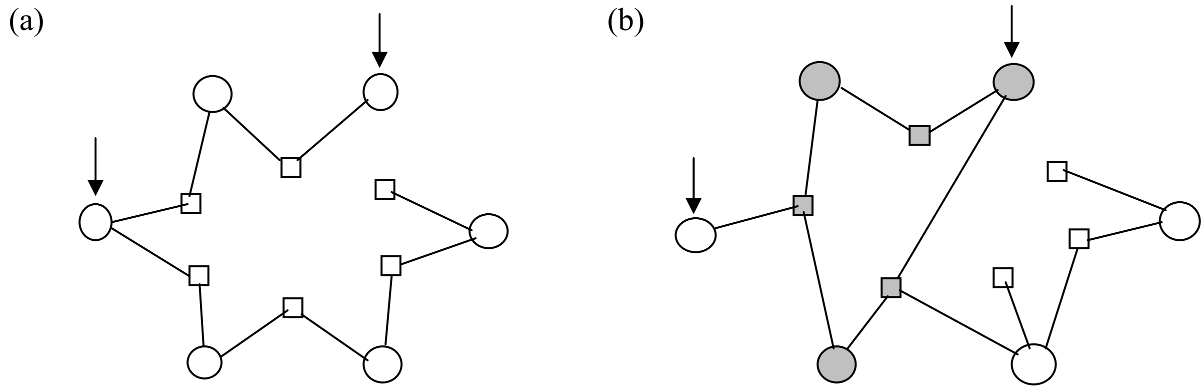
Unser Konzept und die Materialien sind nach geeigneter didaktischer Bearbeitung und wenn der Lehrer/die Lehrerin die Fähigkeit besitzt, im Unterricht richtig hinzuhören, Fehler und Abweichungen (vom vorgedachten Bearbeitungsweg) zu akzeptieren und Zeit zu lassen, und wenn es ihm/ihr mehr um Prozesse denn um Inhalte geht, nach unseren bisherigen Erfahrungen auch in einem offenen (!) Normalunterricht mit gutem Erfolg verwendbar. Da es dabei in der Regel ein ganzes Spektrum von Bearbeitungsmöglichkeiten auf verschiedenen Niveaus gibt, können sie für einen prozeßorientierten Unterricht in ganz verschiedenen Altersstufen eingesetzt werden, zumeist schon am Ende der Grundschulzeit, zumindest aber von der Mittel- bis zur Oberstufe.

<u>4.</u> Mehrdimensionalität des Ideennetzes versus Linearität bei jedem Darstellungsversuch

Die beiden Autoren dieses Beitrags sind nicht sehr glücklich über ihre Entscheidung, im ersten Teil erst einmal allgemein gehaltene Aspekte anzusprechen, bevor im nun folgenden zweiten Teil an einem Beispiel illustriert wird, daß unter den formulierten Vorgaben und insbesondere mit den angegebenen Zielen auf verschiedene Weise erfolgreicher Unterricht durchgeführt werden kann. Jedoch hätte auch ein Voranstellen des Beispiels das unserem Beitrag zugrunde liegende Zusammenhangsnetz in unschöner Weise zerfleddert. Und jede andere Reihung hätte den gleichen Effekt gehabt.
In unserer (Medien-)Gesellschaft ist es weitverbreitet, weil in vieler Hinsicht einträglich, hohe Komplexität auf wenige simple – und dann oft falsche! – Zusammenhänge zu reduzieren. Und sogar auch der sogenannte wissenschaftliche Bereich bleibt davon nicht immer verschont. Der ältere der beiden Autoren hat in seinen Seminaren die beteiligten Studierenden deshalb regelmäßig durch die Frage zu einschlägigen Überlegungen provoziert, ob denn der Lehrer der beste sei, der „am besten erklärt“ und bei dem die Schüler am schnellsten „verstehen“ .

Wir bitten den Leser/die Leserin sich von der „Abgehobenheit“ unserer bisheriger Formulierungen nicht abschrecken zu lassen, sich gründlich – und am besten mit einem zusätzlichen Erfahrungsgewinn durch eigene Bearbeitungsversuche – dem folgenden Beispiel zu widmen und dann noch einmal den Anfangsteil zu lesen und zu überdenken. Berücksichtigt man nicht nur die prinzipiellen Probleme bei der Darstellung von hochkomplexen Zusammenhängen und bedenkt man zusätzlich, daß in diesen unseren Beitrag 20 Jahre und deshalb enorm viel an Erfahrungen und gezielten Beobachtungen mit unserem Konzept und unseren Materialien eingehen, so ist solches vermutlich nicht zu umgehen.

<u>5.</u> Die Vorgabe für mindestens 15-jährige besonders begabte Jugendliche (OStGr)



In diesen beiden Skizzen sollen außen jeweils 6 Lampen (Kreise) vorgegeben sein, von denen jeweils zwei durch Pfeile besonders ausgezeichnet sind. Genau diese beiden Lampen sollen (ausgehend vom „Nullzustand“) jeweils eingeschaltet werden. Dazu dienen die 6 innen durch kleine Quadrate gekennzeichneten und in ihrer Verdrahtung mit den Lampen vorgegebenen „Wechselschalter“, welche Lampen anschalten bzw. schon brennende wieder ausschalten – so wie dies im Computerspiel erfolgt.
Deine Aufgabe ist, - wie üblich: durch Theoriebildung – einen Durchblick durch diese und kompliziertere Lampenschaltungen zu gewinnen. Das Computerspiel enthält viele weitere Konstellationen zum Testen. Dein Gehirn ist jedoch darüber hinaus sogar zu einer unendlichen Zahl derartiger Beispiele fähig.

Hinweise für die Leser dieses Artikels:

Ein solcher Aufgabentext wird benutzt für die Oberstufengruppe OStGr im Hamburger Fördermodell (besonders Begabte aus Klasse 10 und höher).
Die Grauschattierungen in Skizze (b) waren bei der Vorgabe in den Förderveranstaltungen nicht vorhanden.

6. Informationen über das Computerspiel

Innerhalb eines beschränkenden Rahmens (Zahl der Lampen usw.) werden durch vorherige Festlegung durch den Betreuer oder durch einen Zufallsgenerator Konstellationen in Skizzen der Art (a) und (b) vorgegeben, bei denen auf kürzestem Wege genau die besonders ausgezeichneten Lampen zum Brennen gebracht werden sollen. Dazu kann man hintereinander Schalter betätigen – und es wird im Schaltungsablauf durch helles Ausfüllen der jeweiligen Außenkreise angezeigt, welche Lampen jeweils gerade brennen. Der Spielcharakter des Computerprogramms kann dann noch dadurch forciert werden, daß der Computer Punkte für Schnelligkeit und Richtigkeit vergibt (war für die OStGr nicht vorgesehen).
Vorgesehen ist die Ergänzung der Möglichkeit einer schnellen eigenen Konstruktion weiterer Skizzenstrukturen durch einen Computerbenutzer, der sich in einem Theoriebildungsprozeß befindet und seine Hypothesen gezielt abtesten will.

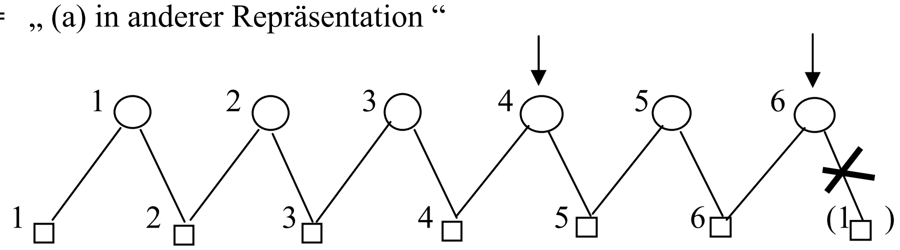
7. Die ersten Bearbeitungsschritte in der OStGr und bei anderen Bearbeitern/Spielpartnern

7A. Der jüngere der beiden Autoren hat das Computerprogramm auch seinen Freunden vorgeführt und dadurch ein unerwartet engagiert-kontroverses Diskutieren in abendlicher Runde eingeleitet. Zu seiner Verblüffung biß sich die Runde nämlich zuerst einmal an der Frage fest, ob das Ergebnis einer Auswahl von Schaltvorgängen auch von deren Reihenfolge abhängt. Bei der OStGr wurde dies im Gegensatz dazu nicht thematisiert. Dies kann zum einen daran liegen, daß die eine solche Frage provozierende, in der Mathematik grundsätzliche und immer wieder auftretende Problematik nicht gesehen wurde, zum anderen aber auch daran, daß intuitive Einsicht vorhanden war, welche diese Frage im vorgegebenen speziellen Fall als „trivial“ erscheinen läßt.
Wir haben darauf hin die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in der OStGr besonders beobachtet und uns mit ihnen verdeckt und explizit über die in der abendlichen Erwachsenenrunde heiß diskutierte Frage nach der Unabhängigkeit von der Reihenfolge unterhalten. Beim direkten Ansprechen bekam man zuerst einen Augenaufschlag zu sehen,

den man als erstaunt-vorwurfsvoll interpretieren kann, und dann einige Stichworte zu hören, aus denen man folgenden Extrakt ziehen kann:
Betrachtet man die Einwirkungen auf eine einzelne Lampe (die zum Anfang wie selbstverständlich in der Nullstellung angenommen wird) und geht man bei dieser von k Schalteinwirkungen aus, so brennt diese Lampe am Ende genau dann, wenn k ungerade ist (und es wird dabei als selbstverständlich vorausgesetzt und deshalb auch nicht mehr formuliert, daß dieser Sachverhalt die Unabhängigkeit von der Reihung mitliefert).
Zu erwähnen ist im Zusammenhang mit dem eben Dargestellten, daß die Tendenzen zum Problematisieren bzw. intuitiven Erkennen entsprechend verteilt waren bezüglich des Sachverhalts, daß bei einem minimalen Schaltungsset kein Schalter mehr als einmal betätigt wird.

Die Leser werden uns sicher zustimmen: Schon hierzu provoziert unser Material mathematiktypische Überlegungen, die in der Schule ganz und gar nicht selbstverständlich sind.

<u>7B.</u> (c) = „ (a) in anderer Repräsentation “



Hier hatte die OStGr kein Problem, genau die Lampen 4 und 6 eingeschaltet zu bekommen. Man kann dazu z.B. einen Durchlauf machen, der an die vollständige Induktion erinnert: Man schaltet zuerst mit Schalter 1 die Lampe 1 an, betätigt dann Schalter 2 und „transportiert dadurch das Licht von Lampe 1 zu Lampe 2“, und man fährt so fort, „bis das Licht in Lampe 6 angelangt ist“. Entsprechend kann man Licht in Lampe 4 erzeugen und hat dann das vorgegebene Problem gelöst – bis auf die Frage, ob es noch „kleinere“ Schaltungssets gibt, welche ebenfalls genau dieselben Lampen zum Brennen bringen.
In Fortführung der in (7A) skizzierten Überlegungen kann man die Doppelschaltungen weglassen und behält dann nur noch die Schalterbetätigungen bei 5 und 6 übrig. Man kann aber auch direkt erkennen, daß für das Anknipsen von zwei aufeinanderfolgenden markierten (!) Lampen die dazwischenliegenden Schalter ein „günstiges Angebot“ darstellen.

<u>7C.</u> Hinsichtlich der vorgegebenen Skizze (b) kommt man zu der Antwort, daß es kein Schalterset gibt, welches die „Nullstellung“ genau in die gewünschte Konstellation (genau die Lampen 4 und 6 brennen) überführt. Zum Beweis wurde die Figur auf den grau unterlegten „vollständigen Kreis der Größe 3“ reduziert und ein allgemeiner Satz bemüht, der besagt, daß in solchen vollständigen Kreisen stets nur eine gerade Zahl von Lampen zum Brennen gebracht werden kann (siehe 7D).

<u>7D.</u> Wir sind damit schon mitten im ersten Abschnitt eines Theoriebildungsprozesses!

Wir haben eine <u>neue Begriffsbildung,</u> nämlich „vollständiger Kreis“ (n Lampen und n Schalter im Kreis angeordnet und durch Kreisstücke oder Strecken paarweise verbunden – in Skizze (a) fehlt nur noch eine Verbindung zum vollständigen Kreis),

wir haben einen <u>neuen mathematischen Satz</u>, nämlich daß in einem vollständigen Kreis jede gerade Zahl von Lampen (immer mitgedacht: aus der „Nullstellung“) zum Brennen gebracht werden kann und keine ungerade Zahl von Lampen,

und wir haben schließlich einen <u>neuen Beweis</u>, der etwa wie folgend formuliert wurde:
Teil I : Jede Schalterbetätigung nimmt genau zwei Änderungen vor. Also kann zum Schluß nur eine gerade Zahl von Änderungen – und damit von brennenden Lampen – herauskommen.
Teil II: Jede gerade Zahl von Lampen kann man in disjunkte Paare sortieren und diese hintereinander im Sinne des letzten Formulierung in (7B) zum Brennen bringen.

Zu relativ leicht erringbaren Erfolgserlebnissen und zu einer weiteren Anreicherung des momentanen Theorienetzes führt dann noch die Frage, welches benutzbare Schalterset minimal ist (was in der Regel eindeutig beantwortet werden kann).

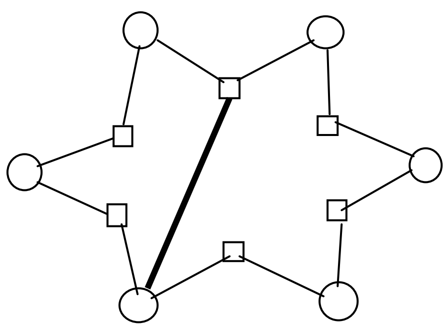
<u>7E.</u> Ebenfalls in der Mathematik weitverbreitet ist es, nach der Kenntnis der Beziehungsumgebung einer einfachen Bezugsstruktur von dieser aus <u>das Problemfeld auszuweiten.</u>

Der vollständige Kreis ist eine solche Bezugsstruktur – und die in (7D) formulierten Zusammenhänge gehören zu ihrer Beziehungsumgebung.

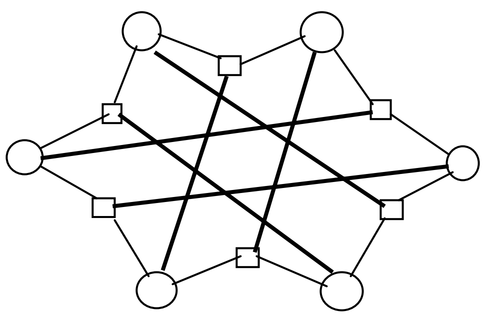
Zu dieser Beziehungsumgebung gehören aber auch die Ausführungen in (7B), aus denen entnommen werden kann, daß in jedem um genau eine Verbindung verminderten vollständigen Kreis jede Brennkonstellation realisiert werden kann.

In der OStGr wurden bald u.a. auch die folgenden „Nachbarstrukturen“ des vollständigen Kreises betrachtet:

(d)



(e)



Vermindert man den vollständigen Kreis um eine Verbindung, so erhält man eine Struktur der in Skizze (a) dargestellten Art und kann jede mögliche Brennkonstellation erzeugen. Es liegt somit nahe zu versuchen, den nicht so günstigen vollständigen Kreis in einer gewissen Symmetrie dazu jetzt nicht durch die Wegnahme, sondern durch die Anlagerung einer Verbindung schaltungsgünstiger zu gestalten (Dazu passen die Ausführungen über die Reaktion der agierenden Personen auf den Momentanzustand des zu produzierenden Theorienetzes in der Kurzbeschreibung der Modellierung von Theoriebildungsprozessen). Und siehe da, es läßt sich allgemein, also für jede Zahl n (>2) von Lampen, und relativ leicht beweisen, daß dann jede Brennkonstellation geschaltet werden kann, wobei der „Dreierschalter“ für ungerade viele brennende Lampen beteiligt ist, und „im geraden Fall“ nicht benutzt werden darf und auch nicht benutzt werden muß.
Auch die Struktur in (e) hat einen bekannten, da trivialen Symmetriepartner. Nimmt man nämlich in einem vollständigen Kreis vom Grade n auf geeignete Weise n Verbindungen weg, so erhält man eine Verbindungsstruktur aus n Lampen und n Schaltern, bei der jeder Schalter mit genau einer Lampe verbunden ist – und man kann dann natürlich jede Brennkonstellation schalten. Und man versucht durch die Erforschung der Eigenschaften der Struktur (e) oder anderer „rotationskongruenter“ Strukturen aus ausschließlich Dreierschaltern herauszubekommen, ob auch diese optimale Schaltungseigenschaft symmetrisch angelagert ist.

Unsere Teilnehmerinnen und Teilnehmer benutzten hier offensichtlich genau die prozeßsteuernden Elemente einer Plausibilitätslogik, der Polya fast ein ganzes Buch gewidmet hat, das jedoch von fast allen Psychologen und Mathematikdidaktikern, welche sich mit produktiven mathematischen Prozessen befassen, gar nicht oder viel zu wenig beachtet und deshalb auch gar nicht oder viel zu wenig in die didaktischen Überlegungen einbezogen wird.
Man sieht dann jedoch bald, daß das angesprochene „Dreierschalterproblem“ nicht so einfach gelagert ist wie das „Einerschalterproblem“ (bei dem die Bezeichnung „Problem“ eigentlich unangebracht ist). Und vermutlich steigt dann auch eine Ahnung herauf, daß die bisherigen mathematischen Hilfsmittel für die Lösung dieses „Dreierschalterproblems“ nicht mehr ausreichen und daß man sich deshalb nach neuen Hilfsmitteln umschauen muß.

7F. Geht man davon ab, daß gleichviel Lampen und Schalter vorgegeben sind, so erhält man den Zutritt zu neuen Bereichen des assoziierten Problemfeldes.

Ein Problem, das ebenfalls bald gesehen wurde, wird durch die Frage vorgegeben, ob die Zahl der Schalter stets mindestens so groß sein muß wie die Zahl der Lampen, wenn man jede Brennkombination der Lampen schalten können will.

Die Beantwortung dieser Frage sieht einfach aus, – wenn man die Antwort vorgestellt bekommt. Sie ist aber nicht einfach, wenn man sie selbst finden soll. Denn dazu ist sehr große mathematische Flexibilität und Risikobereitschaft - oder aber eine Routine gefragt, welche 15- oder 16-Jährige in der Regel noch nicht haben.

Und so sieht eine routinierte Beantwortung aus:
- Nimmt man die „Nullstellung“ dazu, so gibt es bei n Lampen genau 2^n verschiedene Brennkombinationen.
- Setzt man voraus, daß es bei jedem Schalter nur Sinn macht, ihn höchstens einmal zu betätigen, und daß es nicht auf die Reihenfolge ankommt, so kann man mit k Schaltern höchsten 2^k verschiedene Brennkombinationen erzeugen.
- Daraus folgt, daß $k \geq n$ gelten muß, wenn man jede mögliche Brennkombination erzeugen kann.

Daß die Bedingung $k \geq n$ nicht genügt, um schließen zu können, daß man jede Brennkombination erhalten kann, läßt sich leicht an Beispielen klarmachen.

Auch hier schreien die offen gebliebenen Fragen nach neuen mathematischen Hilfsmitteln.

8. Teil 2 des Prozesses: Neue Repräsentationen eröffnen neue Möglichkeiten und Horizonte

Hier kommt eine heuristische Strategie zum Tragen, welche nicht wichtig genug genommen werden kann, - und die man deshalb bei gemeinsamen und abschließenden Metabetrachtungen über den Theoriebildungsprozeß zu einem zentralen Diskussionsthema machen sollte.
Die nachfolgende weitere Repräsentation ist, wenn man sie nicht nur zur Hypothesengenerierung, sondern vor allem für Beweise benutzen will, nach unseren Erfahrungen auch bei mathematisch besonders Begabten nur in Oberstufengruppen hinreichend ergiebig verwendbar.
Auch bei solchen Oberstufengruppen kann man in der Regel nicht vermeiden, diese Repräsentation zumindest andeutungsweise einzugeben. Etwas in der Art dieser Repräsentation gehört in diesem Alter offensichtlich in der Regel noch nicht zu irgendeinem assoziierbaren subjektiven Erfahrungsbereich.

8A. Neue Repräsentation – zuerst der Struktur in (a) bzw. (c) und dann der in (b) (mit zu (c) analogen Zuordnungen – die Spalten stehen in der Reihenfolge der Lampen)

Schalter 1	1 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0	a
2	1 1 0 0 0 0	1 1 0 0 0 0	b
3	0 1 1 0 0 0	0 1 0 0 0 0	c
4	0 0 1 1 0 0	0 1 1 0 0 1	d
5	0 0 0 1 1 0	0 0 1 1 1 0	e
6	0 0 0 0 1 1	0 0 0 0 1 1	f
Brennkonstellation der Lampen	0 0 0 1 0 1	0 0 0 1 0 1	

Für den Kenner ist sofort ersichtlich, daß man sich hier in einen 6-dimensionalen Vektorraum begeben hat, der allerdings nicht über dem Körper der reellen Zahlen angelegt ist, sondern über dem Restklassenkörper modulo 2.
Jugendliche müssen erst einmal modulo 2 rechnen lernen. Dabei ist von der konkreten Situation auszugehen, die modelliert wird. So liefern die Wechselschaltungseigenschaften die Regeln $1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ und $0 + 0 = 0$. Nimmt man den r-ten Schalter in Anspruch, so kann man dies durch die Multiplikation der r-ten Zeile mit 1 interpretieren, nimmt man den q-ten Schalter nicht, so bedeutet dies die Multiplikation der q-ten Zeile mit 0.

Der Satz, daß man genau dann alle möglichen Brennkonstellationen schalten kann, wenn man jede Lampe einzeln durch geeignete Schaltkombinationen zum Brennen bringen kann, war offensichtlich intuitiv genau so schnell vorhanden wie der schon angesprochene Sachverhalt, daß es genügt, jeden Schalter höchstens einmal zu benutzen (was eine unverzichtbare Voraussetzung für diese neue Repräsentation ist!).

In der Matrix zu (a) bzw. (c) sieht man sehr schnell, daß und wie man die Einheitsvektoren erzeugen kann, welche das Brennen einer einzigen Lampe repräsentieren.

Daß man durch die Schaltungskonstellation in (b) die vorgegebene Brennkonstellation nicht erzeugen kann, sieht man im Zusammenhang zur Überlegung in (7C) so:
(Die a, b, ...f sind Elemente aus dem Restklassenkörper modulo 2, also entweder 0 oder 1)

Ausgehend von der obigen 2. Matrix erhält man aus den Spalten 3, 5 und 6 die notwendigen Bedingungen: (3) $d + e = 0$, (5) $e + f = 0$, (6) $d + f = 1$
Wegen $e + e = 0$ für alle e ergibt sich $d + f = 0$ aus (3) und (5) im Widerspruch zu (6).

8B. Am Ende von Abschnitt (7E) haben wir eine Art von Versprechen gegeben, das wir jetzt - beispielhaft - an der Struktur aus (e) einlösen wollen. Die zu (e) gehörende Matrix ist nachfolgend links zu finden – und rechts daneben sind die zugehörigen Spaltengleichungen notiert (Die Durchnumerierung der Lampen und Schalter erfolgt bezüglich der vorgegebenen Schaltskizze wie eben im Uhrzeigersinn und rechts beginnend).

1 0 1 0 0 1	a	(1)	$a + b + e = 1$
1 1 0 1 0 0	b	(2)	$b + c + f = 0$
0 1 1 0 1 0	c	(3)	$a + c + d = 0$
0 0 1 1 0 1	d	(4)	$b + d + e = 0$
1 0 0 1 1 0	e	(5)	$c + e + f = 0$

0 1 0 0 1 1 $\quad f \qquad$ (6) $\quad a + d + f = 0$

Ausrechnung:

(1) + (4) $\rightarrow$ (7) $\quad a + d = 1$, $\quad$ (7) + (3) $\rightarrow$ (8) $\quad \underline{c = 1}$, $\quad$ (7) + (6) $\rightarrow$ (9) $\quad \underline{f = 1}$,

(2) + (8) + (9) $\rightarrow$ (10) $\quad b = 0$, ...usw..... bis $\quad e = 0$, $\underline{a = 1}$ und $\quad d = 0$

Daß diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, sieht man unmittelbar daran, daß man die Zeilen 1 , 3 und 6 zum Einheitsvektor 1 0 0 0 0 0 addieren kann..

Aus rotationssymmetrischen Gründen erhält man die anderen Einheitverktoren durch zyklisches Weiterschieben – den nächsten Einheitsvektor 0 1 0 0 0 0 also aus den Zeilen 2 , 4 und 6 . (Auch dies ist eine Einsicht, auf deren Auffinden Jugendliche stolz sind und an der sie sich dann sehr erfreuen können).

<u>8C.</u> 1. Beispiel für ein „schönes“ und „nahes“ Anschlußproblem aus der Fülle des sich hier aufdrängenden Problemfeldes:

Im Anschluß an (d), aber auch an den Begriff „vollständiger Kreis“, kann man einen „vollständigen Dreierschalterkreis“ betrachten, bei dem jeder Lampe ein Schalter zugeordnet ist, der Verbindung zu dieser Lampe und den ihr links und rechts direkt benachbarten Lampen hat. (Wie sich schon bei den aus unseren Fördergruppen stammenden Strukturen (d) und (e) zeigte, kommen die von uns betreuten Jugendlichen sehr schnell auf derartige Ideen). Aus den vermutlich zuerst behandelten Spezialfällen $n = 3, 4, 5, 6, ...?....$ ergeben sich Hinweise auf ein interessantes Aussagengefüge. Vielleicht erproben sich die Leser dieses Artikels (auch!) an dem Problem, für welche n alle Brennkonstellationen geschaltet werden können und für welche nicht, um ein Gespür für die vorgestellten Materialien zu bekommen.

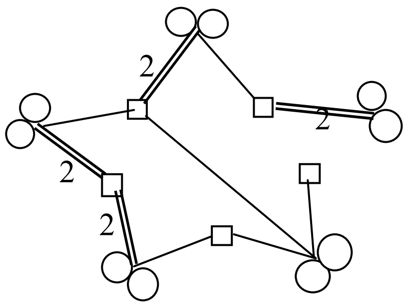
Im anschließenden Problemfeld gibt es auch noch ganz andere Wohnviertel:

Für Jugendliche vermutlich neu, für die Leser vermutlich im Routinekasten (Vektorraumtheorie!), ist die Frage, welche Brennkonstellationen bei (b) oder anderen Schalterstrukturen geschaltet werden können, bei denen nicht alle Brennkonstellationen geschaltet werden können. Auch hier tut sich ein enorm reichhaltiges Feld auf, in dem man mathematisch theoriebildend aktiv werden kann – und dies unter sehr günstigen Vorbedingungen, da mit sehr einfachen Rechenregeln.

<u>8D.</u> Ausweitung des Problemfeldes durch Übergang zum Rechnen modulo n mit $n \geq 2$.

Matrix und zugehörige Computeroberfläche könnten im Falle $n = 3$ so aussehen (Beispiel!) :

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$



(f)

In unsere Fördergruppen haben wir jedoch eine andere bildliche Darstellung auf dem Computer gewählt, die von der Optik her die Repräsentation durch Vektoren vorbereiten sollte.

9. Man kann ein Computerprogramm auch so gestalten

Hier werden Knöpfe gedrückt

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ ...usw... ⟶ Hier tut sich etwas nach Knopfdruck

und dabei die Art der Zusammenhänge (wie wirkt sich das Drücken der Knöpfe rechts aus?) nicht mitteilen, sondern implizit zur Aufgabe machen, die Zusammenhänge zu erforschen. Z.B. erhielte man ein solches Computerprogramm, wenn man in den Skizzen (a) bis (f) alle Verbindungslinien einschließlich eventueller Beschriftungen wegließe, aber weiter die explizite Aufgabe stellte, genau die markierten Lampen möglichst schnell zum Brennen zu bringen. Für den „Hier-tut-sich-was-Kasten“ kann man sich aber auch ganz verschiedene mathematikhaltige Reaktionen einfallen lassen und dabei auch noch - für die spielenden Kinder unbewußt - Kopfrechnen, Zerlegen in Primfaktoren, Symmetrien sehen usw. üben lassen, so wie diese unbewußt das Prinzip des Koordinatensystems kennen lernen, wenn sie sich beim „Schiffe Versenken“ betätigen.

10, Abschließende Bemerkungen

Wir hoffen, daß wir wenigstens ein Gespür dafür vermitteln konnten, daß unsere Materialien geeignet sind, Theoriebildungsprozesse – oder zumindest wesentliche Elemente davon – nicht nur bei besonders Begabten, sondern auch bei „Normalschülern“ verschiedenen Alters auf den Weg zu bringen. Dabei darf man aber nicht unrealistische Erwartungen hegen und muß insbesondere als Lehrender dazu bereit sein, sich selbst vollkommen ehrlich beim zeitlich ausgedehnten Arbeiten mit unseren Materialien zu beobachten und diese Beobachtungen in die Unterrichtsgestaltung und in die Bewertung von Schülerleistungen ganz wesentlich einfließen zu lassen.

Insbesondere auch die Computerspiele können mit einfacheren Strukturen versehen werden und dann auch schwächeren und jüngeren Schülern Erfolgschancen bieten und dadurch motivierend wirken.

Wir hätten hinsichtlich der Arbeit mit unseren Materialien eine Fülle von faszinierenden Praxisbeobachtungen weiterzugeben. Leider läßt sich dieses in einem relativ kurzen schriftlichen Beitrag nur teilweise und mehr schlecht als recht bewerkstelligen, - vor allem aus prinzipiellen Gründen, wie schon in (7) dargestellt. Wir bitten deshalb um verständnisvolle Nachsicht.

Ebenfalls im Sinne der Ausführungen in (7) erinnern wir an unsere Bitte, nach dem Bekanntwerden mit dem hier beispielhaft vorgestelltem Material und - hoffentlich – auch nach einigen eigenen mathematischen Bearbeitungsversuchen sich noch einmal mit den allgemein gehaltenen Überlegungen und Informationen im ersten Teil dieses Artikels zu befassen. Falls dies geschieht, danken wir für die Mühe und hoffen, daß sich diese Mühe – langfristig! – lohnt.

Literatur

Bettina Heintz , Die Innenwelt der Mathematik , Springer 2000

C. F. Gauß , Mathematisches Tagebuch 1796-1814 , Ostwalds Klassiker , Nachdruck 1976

Philip J.Davis / Reuben Hersh , Erfahrung Mathematik , Birkhäuser 1986

DMV-Mitteilungen 1-2001 mit den Artikeln von Davis und Remmert

Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik , Tagungsband „Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften“ 1999 , mit Artikeln von Dress und Kießwetter

Georg Polya , Typen und Strukturen plausibler Folgerung / Band 2 von „Mathematik und plausibles Schliessen“ , Birkhäuser 1963

Anschriften der Autoren:

Prof. Dr. Karl Kießwetter , Stormarnstr. 71a , 22926 Ahrensburg

Dr. Hartmut Rehlich , Sapperweg 5 , 22589 Hamburg