Mitt. Math. Ges. Hamburg **26** (2007), 27–42

Zur Konstruktion extremaler Efron-Würfel-Ringe

Anregungen zum entdeckenden Lernen in der Schule *

Von Hartmut Rehlich

1 Einführung

Zwei Spieler verabreden mit den „kuriosen Würfeln“ von Bradley Efron folgendes Spiel [1]: Spieler X wählt einen Würfel und wirft eine Zahl. Dann wählt Y einen anderen Würfel und wirft ebenfalls. Wer die höhere Zahl wirft, gewinnt. „Kurios“ scheint, daß Y bei diesem Spiel im Vorteil ist, seine Gewinnchance beträgt genau $^2/_3$, also ca. 66%, obwohl X doch die erste Wahl hat und sich somit den besten Würfel nehmen könnte! Die „besser-als“-Relation ist hier - gegen alle sprachgewohnheitsbedingte Erwartung - nicht transitiv, sie bildet einen Ring (Bild 1).

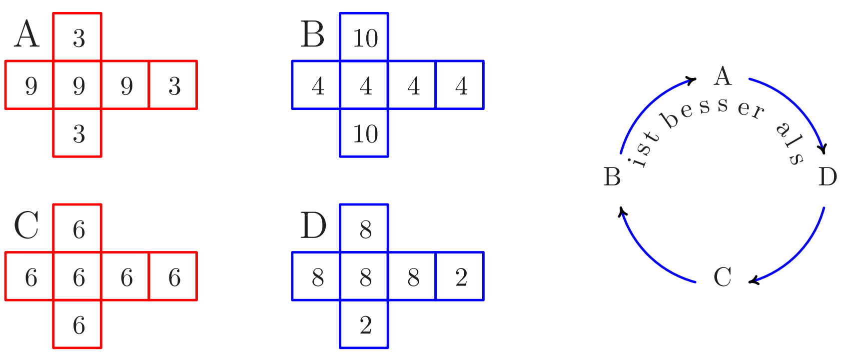

Bild 1 Ring der Würfel A, B, C, D zur „besser-als“ Relation

Im Hamburger Projekt zur Begabtenförderung haben wir dieses spezielle Würfelset zum Ausgangspunkt für weitergehende Fragestellungen genommen. Auf den folgenden Seiten wird dieses Einzelbeispiel in die Vorform einer kleinen Theorie eingebettet. Dabei wurde der Versuch unternommen, die Entwicklung nachvollziehbar zu gestalten. Die Darstellung orientiert sich also nicht - wie vielfach üblich - an „platzökonomischen Forderungen“, sondern eher an psychologischen Gesichtspunkten. Beweise werden an „paradigmatischen Stellvertreterfällen“ erläutert.

*Vortrag auf der Herbsttagung der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 10. November 2006

2 Erkundungen und Zielsuche im Problemfeld

Zunächst haben unsere Teilnehmer Produktionsverfahren für solche Sets entwickelt. Eine Methode – doppelt zyklisches Durchzählen – produziert beliebig viele Sets aus drei Würfeln mit jeweils $3k$ Seiten. Die Produktionsmethode kann dem Bild entnommen werden:

$\mathrm{W}_1 = (1,\ 6,\ 8,\quad 10,\ 15,\ 17,\quad 19,\ 24,\ 26,\ \ldots)$

$\mathrm{W}_2 = (2,\ 4,\ 9,\quad 11,\ 13,\ 18,\quad 20,\ 22,\ 27,\ \ldots)$

$\mathrm{W}_3 = (3,\ 5,\ 7,\quad 12,\ 14,\ 16,\quad 21,\ 23,\ 25,\ \ldots)$

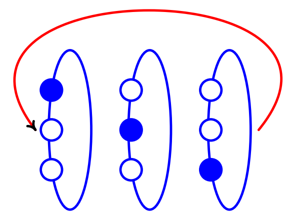

Bild 2 Zyklische Produktionsmethode

Es gibt sehr viele solcher Würfelringe[1], die mit „symmetriehaltigen Methoden“ oder durch „Versuch und Irrtum“ konstruiert werden können.
Hier ist ein spezieller Würfelring:
$\mathrm{W}_1 = \{1, 2, 9, 14, 15, 16\},\ \mathrm{W}_2 = \{6, 7, 8, 11, 12, 13\},\ \mathrm{W}_3 = \{3, 4, 5, 10, 17, 18\}$.
Er hat hohe Gewinnwahrscheinlichkeiten und zwei weitere Besonderheiten:

- Jede der Zahlen von 1 bis 18 kommt genau einmal vor.
- Darüberhinaus wurden die Zahlen sogar so auf die Würfel verteilt, daß jeder Würfel dieselbe Augensumme, nämlich 57 trägt.

Die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten kann mit einer Tabelle übersichtlich durchgeführt werden. Die Augenzahlen sind der Größe nach sortiert. Die Indizes geben an, wie viele Augenzahlen auf dem „schlechteren Nachbarwürfel“ kleiner sind (Bild 2.a).

W_1	W_2	W_3
1_0	6_3	3_2
2_0	7_3	4_2
9_3	8_3	5_2
14_6	11_4	10_5
15_6	12_4	17_6
16_6	13_4	18_6
21	21	21

Bild 2.a Gewinntabelle

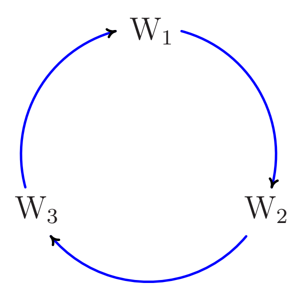

Bild 2.b Würfelring

[1] Wir haben die Würfelringe gezählt, die aus drei sechseitigen Würfeln bestehen. Es sind genau 10705, wenn man jede der Zahlen von 1 bis 18 genau einmal benutzt. Diese Zählung ist kombinatorisch nicht einfach. Sie wird hier nicht weiter beschrieben.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit in dem Würfelring (Bild 2.b) ist an allen Stellen $^{21}/_{36}$. Man findet leicht Beispiele mit anderen Gewinnwahrscheinlichkeiten. Es liegt also nahe zu versuchen, die beschriebene Kuriosität auf die Spitze zu treiben. Dabei ist intuitiv klar, daß die Anzahl der Seiten der als „Würfel“ bezeichneten Objekte und die Anzahl dieser Objekte in einem Ring von Wichtigkeit sind, da größere Anzahlen mehr Variationsmöglichkeiten eröffnen und Feinabstimmungen erlauben. So erreicht man z.B. mit den drei 6-seitigen Würfeln

$$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \quad \{3, 4, 5, 6, 17, 18\}, \ \{1, 2, 13, 14, 15, 16] \ \}$$

an zwei Stellen im Ring die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit $^{24}/_{36}$,
an einer Stelle ist sie dann jedoch kleiner, nämlich 20/36.

2.1 Leitfragen zu einer kleinen Theorie von Würfelringen

► Wie hoch kann die kleinste in einem Würfelring aus n Würfeln vorkommende Gewinnwahrscheinlichkeit für jede Seitenzahl k durch geschickte Verteilung von Augenzahlen auf die Seiten der beteiligten Würfel getrieben werden?

► Wo liegt die Obergrenze für die durchschnittliche Gewinnwahrscheinlichkeit?

► Was ist in Würfelringen aus nur drei Würfeln möglich?

Zur Untersuchung dieser Fragen legen wir einige Bezeichnungen fest:

- Unter einem (n, k) -Würfelring verstehen wir ein Tupel $(\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2, \ldots \mathrm{W}_n)$ aus n Würfeln mit je k Seiten.
- Unter einem (n, k)-Efron-Würfelring verstehen wir einen $(n.k)$-Würfelring mit $\mathrm{W}_1 > \mathrm{W}_2 > \mathrm{W}_3 > \ldots \mathrm{W}_n > \mathrm{W}_1$ (oder jeweils $<$).
- Die Schreibweise $\mathrm{W}_i > \mathrm{W}_k$ ist eine Abkürzung für „W_i ist besser als W_k“ im oben bereits verwendeten stochastischen Sinne.

Erste unmittelbar einsichtige allgemeine Aussagen sind:

- Die Gewinnwahrscheinlichkeiten hängen nicht von der absoluten Größe der Augenzahlen auf den Seiten ab, sondern nur von deren Rangfolge.
- Hinsichtlich der Frage nach im obigen Sinne extremalen Ringen ist es keine Einschränkung davon auszugehen, daß man genau die Zahlen von 1 bis einschließlich $n \cdot k$ benutzt. Falls – bei anderer Belegung – alle Augenzahlen verschieden sind, ist das trivial, im anderen Fall ersetzt man diese unter Beibehaltung der Ordnung und achtet beim Ersetzen der vormals Gleichen darauf, daß man – falls diese auf benachbarten Würfeln liegen – dem im Ring überlegenen Würfel die höhere Augenzahl gibt. So können sich einzelne Gewinnwahrscheinlichkeiten zwar erhöhen, aber nicht verringern.

Von derselben Augensumme auf allen Würfeln auszugehen, wäre eine Einschränkung der Kombinationsmöglichkeiten. Wir fordern diese also nicht.

3 Mustersuche in experimentell ermittelten Daten

Um einen gewissen Über- und Einblick in die Komplexität von Strukturen eines Problemfelds zu gewinnen bzw. Material zur Mustererkennung bereitzustellen, ist es oft sinnvoll, zunächst mit Hilfe eines Computerprogramms eine Vorerkundung durchzuführen. Das hier benutzte Programm arbeitet „kombinatorisch experimentell", es basiert nicht auf vorab bekannten Strukturen, sondern probiert schlicht alle möglichen Belegungen durch. So gewinnt man vorab einen auch gefühlsmäßigen Eindruck (wenn schöne Strukturen sichtbar werden, ist durchaus nicht klar, ob diese auch einfach zu beweisen sein werden), ob die Fragestellung für unsere Fördergruppen geeignet sein könnte.

Mit k wird die Seitenzahl der einzelnen Würfel (Glücksräder) bezeichnet. $G : V$ gibt das maximal erreichbare Gewinn-Verlust-Verhältnis *an der schwächsten Stelle* im Efron-Würfelring aus höchstens k Würfeln an. Um dieses Verhältnis zu erreichen, genügen bereits s Würfel. Es wird auch angegeben, welche Wahrscheinlichkeit sich gerade noch mit nur $n = 3$ Würfeln an der schwächsten Stelle realisieren läßt.

	$n = k$ Würfel im Ring			nur 3
k	$G : V$	P_{max}	s	P_{max}
3	5:4	0,556	3	0,556
4	10:6	0,625	4	0,5
5	16:9	0,64	5	0,6
6	24:12	0,667	4	0,555
7	33:16	0,673	5	0,571
8	44:20	0,688	6	0,609
9	56:25	0,691	7	0,555
10	70:30	0,7	6	0,6
11	85:36	0,702	7	0,595
12	102:42	0,708	8	0,583
13	120:49	0,71	9	0,615
14	140:56	0,714	8	0,586
15	161:64	0,716	9	0,6

	$n = k$ Würfel im Ring			nur 3
k	$G : V$	P_{max}	s	P_{max}
16	184:72	0,719	8	0,609
17	208:81	0,72	9	0,588
18	234:90	0,722	10	0,611
19	261:100	0,723	9	0,601
20	290:110	0,725	10	0,6
21	320:121	0,726	11	0,616
22	352:132	0,727	10	0,595
23	385:144	0,728	11	0,608
24	420:156	0,729	12	0,609
25	456:169	0,73	13	0,6
26	494:182	0,731	12	0,615
27	533:196	0,731	13	0,603
28	574:210	0,732	12	0,607

Drei Beispiele zur Erläuterung der Tabelle:
Es gibt Efron-Würfelringe mit 10-seitigen Würfeln und höchstens 10 beteiligten Würfeln, bei denen keine Gewinnwahrscheinlichkeit zwischen benachbarten Würfeln unter 70% liegt. Eine höhere Marke läßt sich nicht erreichen, und um die 70% zu realisieren, muß der Kreisring mindestens 6 Würfel enthalten.

Wenn man *nur drei* Würfel mit jeweils 10 Seiten verwendet, kann an der schwächsten Stelle bestenfalls eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 60% realisiert werden.

Für 6-seitige Würfel ist das am Anfang gezeigte „Einführungsbeispiel“ von Efron in doppelter Hinsicht extremal. Die Gewinnwahrscheinlichkeit $^2/_3$ läßt sich bei sechsseitigen Würfeln nicht an jeder Stelle überbieten und mit weniger als vier Würfeln kommt man auch nicht aus, wenn man die Gewinnwahrscheinlichkeit $2/3$ realisieren will.

Muster

Wie zu erwarten war, zahlt sich die Möglichkeit, bei wachsender Seitenzahl und Würfelzahl Feinabstimmungen vorzunehmen, aus. Die an der schwächsten Stelle gerade noch realisierbare Gewinnwahrscheinlichkeit wächst monoton. Zusätzlich – und das konnte man vorher natürlich nicht vermuten – schmiegt sich die Folge der Gewinnwahrscheinlichkeiten augenscheinlich asymptotisch an 0,75 an. Das bekräftigte auch eine längere, durch den Computer generierte Tabelle, hier ist nur ihr Anfang wiedergegeben (vgl. Bild 3). Überraschend scheint zunächst, daß der höhere Kombinationsreichtum bei wachsender Seitenzahl sich dann, wenn man nur 3 Würfel (also die Minimalzahl) verwendet, nicht in einer monoton wachsenden Folge der Gewinnwahrscheinlichkeiten niederschlägt. Man erkennt jedoch, daß die Fibonaccizahlen in zweifacher Hinsicht eine Rolle spielen: Einerseits ist bei diesen die an der schwächsten Stelle realisierbare Gewinnwahrscheinlichkeit besonders hoch. In Bild 3 ist dies durch offene Kreise hervorgehoben. Für alle Folgezahlen bis zur nächsten Fibonaccizahl ist sie dann kleiner, um bei der nächsten Fibonaccizahl ein bis dahin globales Maximum zu erklimmen. Andererseits nähert sich die Folge der Gewinnwahrscheinlicheiten selbst der kleinen *Goldene-Schnitt-Zahl* $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180\ldots$ an.

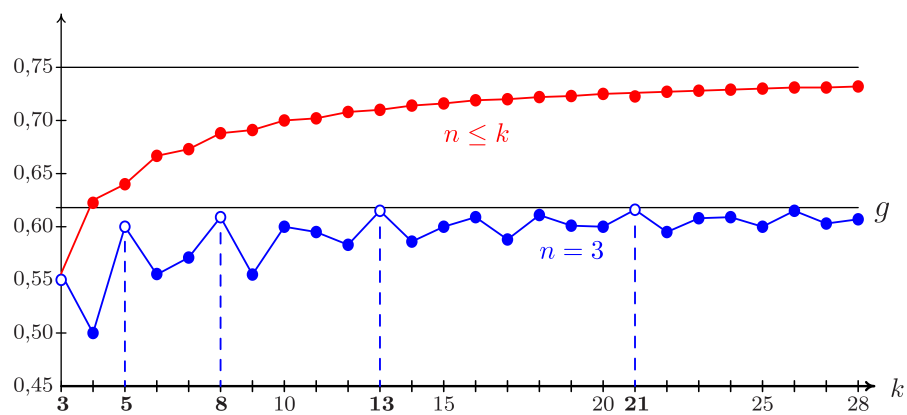

Bild 3 Die höchste an der schwächsten Stelle in einem (n, k)-Efron-Würfelring realisierbare Gewinnwahrscheinlichkeit ist für $n \leq k$ und $n = 3$ angegeben.

Bemerkungen zur Didaktik
Der inhaltliche Aufbau der folgenden Abschnitte orientiert sich an heuristischen Gesichtspunkten. Dadurch soll insbesondere deutlich werden, daß die genaue Betrachtung anschaulicher Musterbeispiele und „spielerisches Hantieren mit Vorstellungsobjekten“ in verschiedenen Repräsentationen (insbesondere in einer für dieses Problemfeld neuartigen Graphen-Darstellung) zur selbständigen Entdeckung verschiedener allgemeinerer Zusammenhänge führen können.

K. Lorenz weist darauf hin [2, S. 73], das letztlich auch alle Abstraktionen auf psychischen Vorgängen dieser Art beruhen:

> *Ich sehe nicht, was Denken grundsätzlich anderes sein soll, als ein solches probeweises und nur im Gehirn sich abspielendes Handeln im vorgestellten Raum. Zumindestens behaupte ich, daß Vorgänge dieser Art auch in unseren höchsten Denkoperationen mit enthalten sind und ihre Grundlage bilden. Jedenfalls gelingt es mir nicht, mir irgendeine Form des Denkens vorzustellen, die von dieser Grundlage unabhängig wäre. W. Porzig hat schon vor mehr als 20 Jahren in seinem Buche „Die Wunder der Sprache“ folgende Sätze geschrieben: „Die Sprache übersetzt alle unanschaulichen Verhältnisse ins Räumliche. Und zwar tut das nicht eine oder in eine Gruppe von Sprachen, sondern ausnahmslos alle Sprachen tun dies.“*

4 Repräsentation von Äquivalenzklassen von Efron-Würfelringen

Die Art der Repräsentation einer mathematischen Struktur kann erfahrungsgemäß erheblichen Einfluß auf die Richtung der wachgerufenen Assoziationen nehmen. Diese Beeinflussung hat eine sehr individuelle Seite, da sie von den Vorerfahrungen des Problembearbeiters abhängt. Vielleicht werden Gedankenverbindungen zu anderen Inhalten geweckt und er kann auf Analogien zurückgreifen. So können z. B. auch Handlungsvorstellungen aktiviert werden, die sich in mathematische Beweisideen transformieren lassen. Ebenso können persönliche ästhetische Empfindungen eine wichtige Motivationsquelle sein.

Neben diesen individuellen Wirkungen kann die Repräsentation aber auch mehr oder minder treffend Aspekte der „inneren Struktur“ eines mathematischen Objekts widerspiegeln. Die Beurteilung, ob und wie gut so etwas durch eine bestimmte Repräsentation gelingt, ist natürlich auch wieder ein individueller geistiger Vorgang, man kann sich aber vorstellen, daß hier durchaus lokale Konsensbildungen denkbar sind. Insofern hat dieser Aspekt auch eine „halbobjektive“ Seite.

In Bild 4 wird eine Repräsentation von Efron-Würfelringen durch drei Speichen vorgestellt und für Überlegungen herangezogen, die visuell veranlagten Menschen das Nachdenken erheblich erleichtern kann:
Die drei Speichen repräsentieren die drei Würfel. Die Punkte auf den Speichen

stehen für die Würfelseiten und zwar der Größe nach geordnet von innen nach außen. Die *gerichteten Bögen* des Graphen zeigen von jedem Punkt zu der größten Augenzahl des Ringnachfolgers, die noch geschlagen wird. Die kleinsten Zahlen 1 und 2, die sich beide auf demselben Würfel befinden, schlagen gar keine Augenzahl. Die zugehörigen Bögen zeigen in das Zentrum der Spiralstruktur.

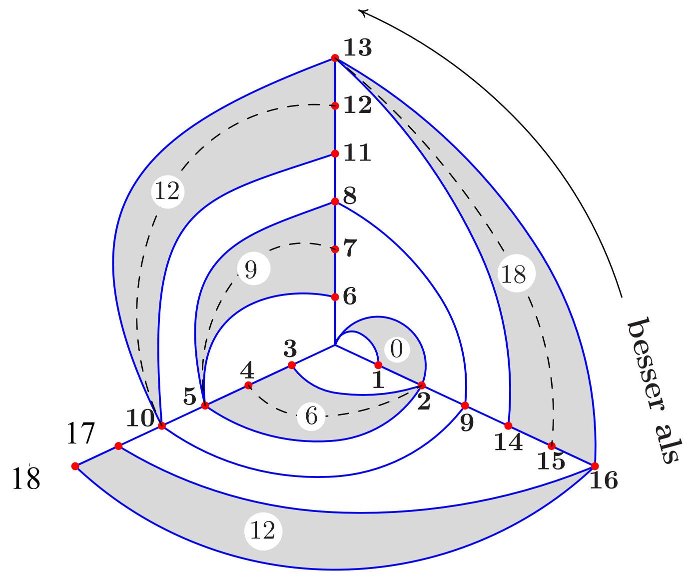

Bild 4 Repräsentation der Gewinntabelle (vgl Bild 2.a) durch Speichen

Diese Repräsentation ist „ mathematisch und psychologisch vorteilhaft“, denn:

- Die zyklische Struktur der Efron-Würfelringe spiegelt sich in der Graphik wieder.
- Man kann die Zahlen weglassen. Es kommt ganz offensichtlich gar nicht auf deren absolute Größe an, sondern lediglich darauf, welche im Paarvergleich die größere ist. Dadurch wird eine „automatische Äquivalenzklassenbildung“ vorgenommen.

5 Ein Verbesserungsprozeß für Efron-Würfelringe

Das folgende Bild zeigt einen Graphen, der eine Äquivalenzklasse aus unendlich vielen (4,4)-Efron–Würfelringen repräsentiert. Rechts daneben ist ein Repräsentant mit konkreten Seitenbeschriftungen angegeben. (Hier kann eine Beschriftungsmethode abgehoben werden.)
Für diesen Graphen gilt A > B > C > D > A mit jeweils 9/16 Gewinnwahr-

scheinlichkeit. Nun wird ein Verbesserungsprozeß durchgeführt, der alle Gewinnwahrscheinlichkeiten im Würfelring erhöht. Dieser Prozeß kann an jedem nichtoptimalen Graphen durchgeführt werden und Gewinnwahrscheinlichkeiten erhöhen, aber niemals verringern.

Start

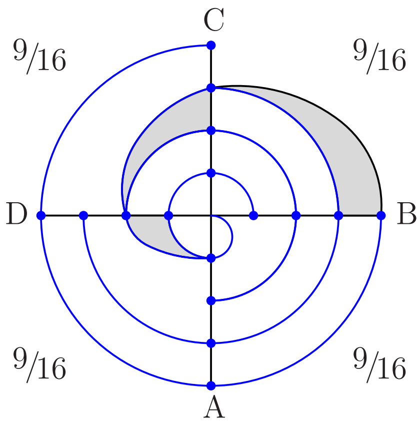

Bild 5.a) Äquivalenzklasse

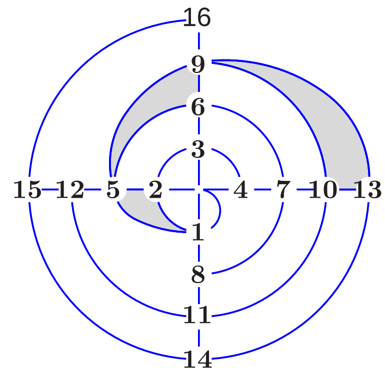

Bild 5.b) Konkreter Würfelring

Startet man bei der größten Zahl und folgt dem Verlauf der Bögen, so bewegt man sich auf einer im Zentrum endenden (Haupt-)Spirallinie, in die andere hineinführen. Das ist bei jedem derartigen Graphen der Fall, denn die Größer-als-Relation innerhalb der natürlichen Zahlen ist transitiv. Nun wird für diese Hauptspirale derjenige Graph konstruiert, der einen Efron-Würfelring mit maximalen Gewinnwahrscheinlichkeiten zwischen benachbarten Würfeln repräsentiert.

Ziel

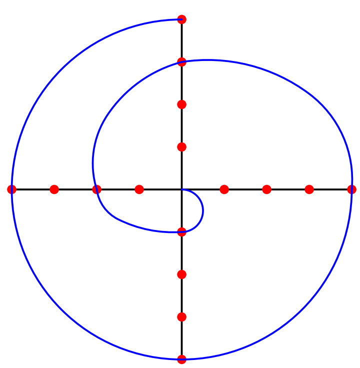

Bild 6.a

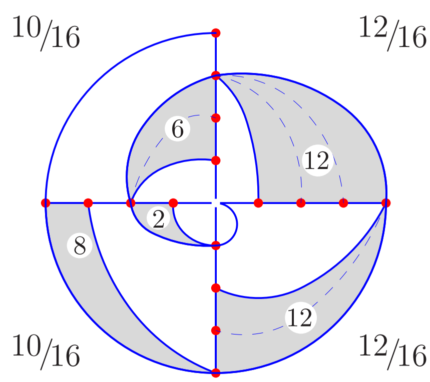

Bild 6.b

Hilfssatz 1:
Zu jeder vorgegebenen Hauptspirale kann ein Efron-Würfelring mit extremalen Gewinnwahrscheinlichkeiten zwischen den beteiligten Würfeln konstruiert werden.

Beweis:
Die anzuwendende Ergänzungsmethode kann der Graphik entnommen und verallgemeinert werden. Man überlegt sich auch leicht, daß zu Graphen, die durch einen solchen Prozeß entstehen, immer ein konkretes Würfelset angegeben werden kann, das insgesamt durch fortlaufende Augenzahlen beschriftet ist. ■

Hilfssatz 2:
Bezeichnet man den radialen Abstand eines Punktes vom Zentrum der Spiralstruktur mit dem Begriff Niveau, so kann man daraus folgern:

Zu jedem Niveau muß der einen vorgelegten Efron-Würfelring repräsentierende Graph an wenigstens einer Stelle einen absteigenden Bogen haben. Beweis:
Sonst ergäbe sich – wegen der Transitivität in $\mathbb{N}$ – ein Widerspruch der Art $a > a$. Anschaulich gesagt (man denke an die oben genannten Handlungsvorstellungen und K. Lorenz): Wer in endlich vielen Schritten absteigt muß jede Höhe dauerhaft verlassen. ■

Bemerkung:
Diese der unmittelbaren Anschauung in der gewählten Repräsentation entnommenen Einsichten spielen beim Beweis des folgenden Satzes über die „höchste zu erreichende Qualität“ von Efronringen eine maßgebliche Rolle.

6 Ergebnisse

Vergleicht man zwei benachbarte Würfel in einem (n, k)-Efron-Würfelring, so zählt man nach, bei wie vielen der k^2 möglichen Wurfkombinationen der bessere Würfel die höhere Augenzahl zeigt. Diese Anzahl bezeichnen wir als *Schlagkraft* des Würfels . Für sie gilt:

SATZ 1 (Schlagkraftgrenze der Schwächsten)
Die kleinste in einen (n, k)-Efron-Würfelring vorkommende Schlagkraft S eines Würfels kann nicht größer sein als

$$\begin{aligned} S_{\max}(k) &= k^2 - \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 \text{ für ungerades } k \text{ und} \\ S_{\max}(k) &= k^2 - \frac{k}{2} \cdot \frac{k+2}{2} \text{ für gerades } k. \end{aligned}$$

Beweis:
Nach Hilfssatz 2 (s. vorigen Abschnitt) muß es in jedem Würfelring für jedes Niveau j wenigstens einen Würfel geben, bei dem das Niveau fällt.

Man steht also vor der Aufgabe für jedes j die maximal mögliche Schlagkraft eines Würfels, bei dem das j-te Niveau fällt zu berechnen und dann von diesen Zahlen das Minimum zu bestimmen. In Anlehnung an Hilfssatz 1 sieht der betreffende Ausschnitt des Graphen so aus wie in Bild 7. Um weniger als eine Stufe kann j nicht fallen und mehr als alle anderen Zahlen des Nachfolgers im Efron-Würfelring können die Augenzahlen vom $(j+1)$-ten bis zum k-ten Niveau nicht übertreffen:

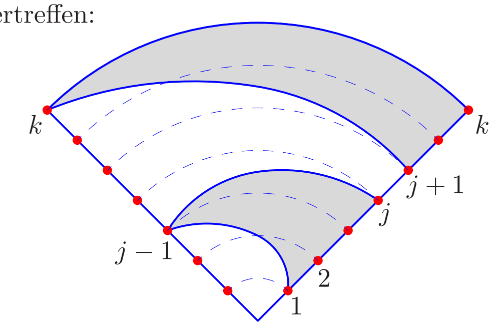

Bild 7 Zum Beweis von Satz 1.

Die maximal mögliche Schlagkraft eines Würfels bei dem das j-te Niveau fällt gegenüber seinem Ringnachfolger ist also $S(j) = j(j-1) + (k-j)k$. Die rechte Speiche repräsentiert also den überlegenen Würfel.
Nun bestimmt man die kleinste dieser Zahlen. Bei $S(j)$ handelt es sich um eine Parabel. Etwas umgeschrieben lautet die Funktionsgleichung

$$S(j) = j^2 - (k+1)j + k^2.$$

Der Scheitel der Parabel liegt bei $j_0 = (k+1)/2$. Für ungerades k ist dies ganzzahlig und man setzt j_0 in $S(j)$ ein. Sonst kann man wegen der Symmetrie der Parabel eine der beiden benachbarten ganzen Zahlen einsetzen. Man erhält dann die oben genannten Ergebnisse. ■

SATZ 2 (Max-Min-Satz zur Gewinnwahrscheinlichkeit)
Die an der schwächsten Stelle eines (n,k)-Efron-Würfelringes höchstens erreichbare Gewinnwahrscheinlichkeit $W(n,\ k)_{max}$ beträgt:
$W(n,k)_{\max} = 0,75 - \frac{2k+1}{4k^2}$ *für ungerades k und*
$W(n,k)_{\max} = 0,75 - \frac{1}{2k}$ *für geradesk.*

Beweis: Man dividiert die höchstmöglichen Schlagkräfte durch k^2. ■

Bemerkung:
Wie man sieht, konvergieren beide Ausdrücke für wachsendes k gegen 75% und sind von n unabhängig. Diese Zahl ist also die obere Grenze für die kleinste vorkommende Gewinnwahrscheinlichkeit in (n,k)-Efron-Würfelringen.

Als Nächstes stellt sich die Frage nach der Existenz von Efron-Würfelringen, bei denen die angegebene Obergrenze *auch tatsächlich realisiert* wird. Eine Antwort gibt der nächste Satz.

SATZ 3 (Existenzsatz)
Für jedes k gibt es einen (n, k)-Efron-Würfelring, in dem jeder Würfel gegen seinen Nachfolger mindestens die Gewinnwahrscheinlichkeit $\mathrm{W}(k,\, n)_{max}$ *hat.*

Beweis:
Es sei W_i derjenige n-seitige Würfel bei dem das i-te Niveau fällt und die größtmögliche Schlagkraft unter dieser Prämisse realisiert wird. Die Würfel W_i bilden einen (k, k)-Efron-Würfelring mit der gewünschten Eigenschaft.

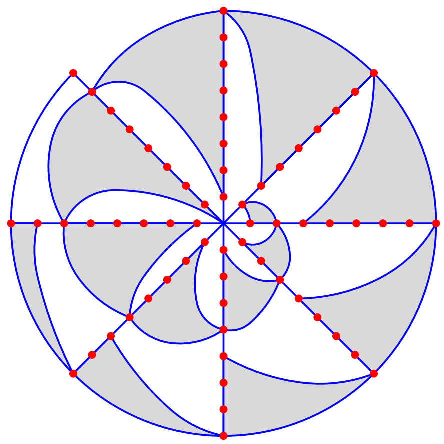

Bild 8 (8,8)-Efron-Würfelring

Man sieht, daß für jedes k ein solcher Ring möglich ist. ■

Bemerkung:
Man kann zu diesen speziellen extremalen Efron-Würfelringen auch durch eine andere anschauliche Handlungsvorstellung „der Reichste gibt allen 1 ab" gelangen: Man geht dabei von einem k-seitigen Würfel aus. Alle Seiten seien mit k beschriftet. Wir betrachten hier exemplarisch den Fall $k = 6$. Es ist klar, daß man einen überlegenen Würfel produzieren kann, wenn man eine Zahl um 5 reduziert und dafür alle anderen um 1 erhöht:
$\{6, 6, 6, 6, 6, 6\}$ geht über in $\{1, 7, 7, 7, 7, 7\}$. Nun gibt eine 7 allen anderen eine 1 ab. Man gelangt dann zu dem Würfel $\{2, 2, 8, 8, 8, 8\}$. Insgesamt erhält man den nichttransitiven „schlechter-als-Zyklus":
$\{6, 6, 6, 6, 6, 6\}^* < \{1, 7, 7, 7, 7, 7\} < \{2, 2, 8, 8, 8, 8\}^* < \{3, 3, 3, 9, 9, 9\}^* < \{4, 4, 4, 4, 10, 10\}^* < \{5, 5, 5, 5, 5, 11\} < \{6, 6, 6, 6, 6, 6\}$. (Die mit * markierten Würfel bilden das ganz oben in Abschnitt 1 angegebene Ausgangsset.)

Allerdings hat man dann eben „nur" ein Beispiel für Efron-Würfelringe mit hohen Gewinnwahrscheinlichkeiten zwischen den Ringnachbarn gefunden, aber noch keinen Beweis, daß es nicht noch extremere Efron-Würfelringe gibt.

Eine hier nicht weiter verfolgte möglicherweise sehr schwierige Anschlußfrage ist die nach der Minimalzahl s von Würfeln mit denen sich das genannte Gewinnwahrscheinlichkeitsmaximum an der schwächsten Stelle realisieren läßt. Nach dem Gesagten reichen k Würfel auf alle Fälle. Für $k = 8$ reichen aber z. B. bereits 6 Würfel. Die „Erparnis“ um so größer, je größer k ist. Für $k = 1000$ kommt man z. B. mit 82 Würfeln aus. Die folgende Tabelle zeigt mit dem Computer ermittelte Anzahlen, die sich evtl. noch weiter verbessern lassen.

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8

k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
s	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10

Satz 4 (Fast hundertprozentige Gewinnwahrscheinlichkeit)
Zu jeder beliebig nah an 100% heranreichender durchschnittlicher Gewinnwahrscheinlichkeit können beliebig viele Efron-Würfelringe konstruiert werden.

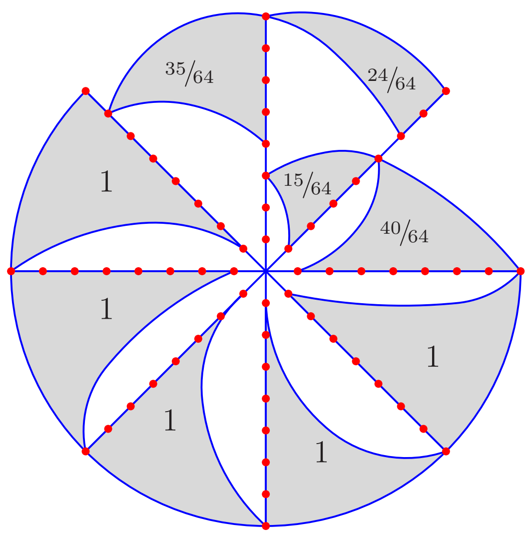

Bild 9 (8,8)-Efron-Würfelring, 5 Würfel haben 100%ige Gewinnwahrscheinlichkeit

Beweis: Wie man an dem Beispiel sieht, läßt sich an allen bis auf drei „Nahtstellen“100%-ige Gewinnwahrscheinlichkeit realisieren. Man kann beliebige weitere Würfel so in den Kreis einbringen, daß auch an diesen Stellen 100%-ige Gewinnwahrscheinlichkeit besteht. Folglich läßt sich die durchschnittliche Gewinnwahrscheinlichkeit beliebig nah an 100% annähern. ■

Bemerkung:

Der abgebildete Graph kann z.B. durch den folgenden Efron-Würfelring konkretisiert werden:

$$\begin{array}{ll} W_1 = (10, 10, 10, 2, 2, 2, 2, 2), & W_2 = (9, 9, 9, 9, 9, 1, 1, 1), \\ W_3 = (8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8), & W_4 = (7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7), \\ W_5 = (6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6), & W_6 = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5), \\ W_7 = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4), & W_8 = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3). \end{array}$$

Efron-Würfelringe mit maximaler durchschnittlicher Gewinnwahrscheinlichkeit sind offensichtlich eher langweilig (zumindest zum Spielen, denn „das Opfer sieht sofort, was los ist").

Satz 5 (Der Goldene Schnitt bei Efron-Würfelringen)
Für jedes $P < g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gibt es einen $(k, 3)$ - Efron-Würfelring, in dem die Schlagkraft jedes Würfels gegenüber seinem Ringnachfolger mindestens $P{\cdot}k^2$ beträgt. Die kleinste vorkommende Gewinnwahrscheinlichkeit in einem $(3, n)$-Efron-Würfelring kann also beliebig genau an die Goldene-Schnitt-Zahl g approximiert werden.

Beweis:
Die Schlagkräfte der drei Würfel des $(k, 3)$-Efron-Würfelring in Bild 10 sind

$$q \cdot k, \quad k \cdot q \quad \text{und} \quad q \cdot (k - q) + (k - q) \cdot k = k^2 - q^2.$$

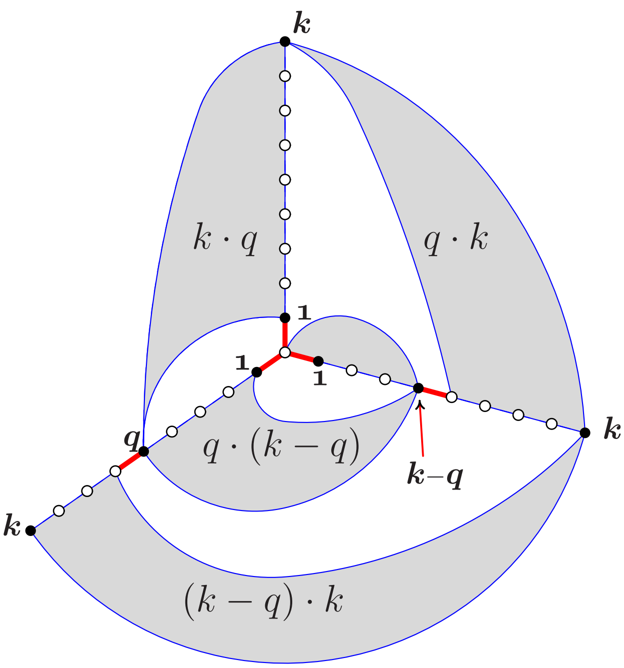

Bild 10 Schlagkräfte in einem $(k, 3)$-Efron-Würfelring

Zwei Schlagkräfte sind also gleich. Wir lassen für k und q auch reelle Zahlen zu und gehen zu einem stetigen Problem über:

Falls $k \cdot q \neq (k-q) \cdot k + q \cdot (k-q) = k^2 - q^2$ gilt, kann das Minimum der Schlagkräfte erhöht werden, indem die kleinere Schlagkraft auf Kosten der höheren vergrößert wird. Das Maximum des kleineren Wertes wird angenommen, wenn $k \cdot q = k^2 - q^2$ gilt. Dividieren wir diese Gleichung durch q^2, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{q}{k} = 1 - (\frac{q}{k})^2 \text{ mit der positiven Lösung } \frac{q}{k} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Wir fassen zusammen:
Zu vorgegebenem $P < g$ leistet jede rationale Zahl q/k mit $P < q/k < g$ also das Gewünschte: Zwei der drei Gewinnwahrscheinlichkeiten sind gleich q/k und die dritte Gewinnwahrscheinlichkeit $1 - (q/k)$ ist größer als g und damit auch größer als P. ■

Bemerkung:
In den optimalen $(n, 3)$-Efron-Würfelringen (vgl. Tabelle S. 30) treten die Fibonaccizahlen gleich zweimal auf, nämlich im *Beschriftungsmuster* und bei den *Gewinnwahrscheinlichkeiten.* Zum Beispiel sind für $n = 8$ die Würfel W_1 = (**1,2,3**, 17,18,19,20,21), W_2 = (**4,5,6,7,8**, 22,23,24), W_3 = (**9,10,11,12,13,14,15,16**) im Muster 3-5-8 beschriftet, und es gilt:
P(W_1 schlägt W_3) $= \frac{5}{8}$, P(W_2 schlägt W_1) $= 1 - (\frac{5}{8})^2$, P(W_3 schlägt W_2) $= \frac{5}{8}$.

7 Abschließende Bemerkungen

Die vorgestellten Zusammenhänge sollten verdeutlichen, daß die Wahl der Repräsentation der betrachteten mathematischen Objekte steuernden Einfluß auf den Bearbeitungsprozeß nehmen kann. Dabei kann unterstellt werden, daß es Strukturfragen gibt, die sich besonders einfach innerhalb der gewählten Repräsentation beantworten lassen, da diese innerhalb des Denkprozesses mit hoher Wahrscheinlichkeit z.B. Assoziationen und Analogiebetrachtungen aufrufen oder erleichtern (z.B. die Notwendigkeit eines Abstiegs von jedem Höhenniveau zu einem tieferen um den Boden zu erreichen), die sonst fern lägen, aber sehr hilfreich sind. Andererseits kann es natürlich auch gute Fragen geben, bei denen die gewählte Repräsentation eher hinderlich ist.

Bei der Arbeit mit Schülern oder Studenten sollte man sich dieser Einflußnahmen bewußt sein und ein Umfeld schaffen, in dem die Teilnehmer selbständig solche Erfahrungen sammeln können. Dabei scheint es uns besonders wichtig zu sein, nicht auf bestimmte Arten und Weisen, wie eine Sache „am besten“ hinzuschreiben ist, zu drängen. Eigene Repräsentationen entwickeln sich mitunter allmählich durch zunächst geringfügige Abänderungen und Umgruppierungen der individuellen Schreibweisen. Eine denkbare „Metamorphose“ der Mengenschreibweise für unsere Würfelkreise (bei der noch mehr Zwischenschritte denkbar sind) könnte z.B. so aussehen wie im folgenden Bild 11:

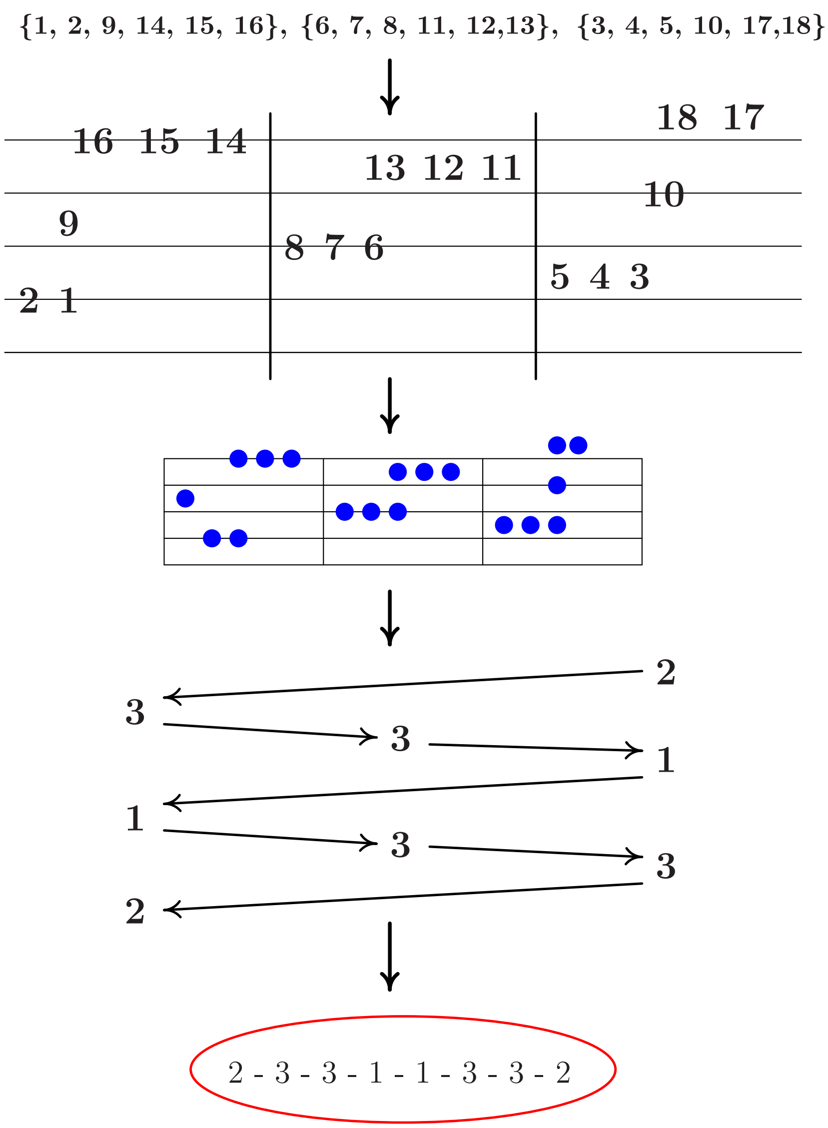

Bild 11 Metamorphose der Repräsentation

Das neue Objekt 2–3–3–1–1–3–3–2 enthält alle wesentlichen Informationen des zugrundeliegenden Efron-Würfelrings. Es repräsentiert ebenso wie die benutzte graphische Darstellung eine Äquivalenzklasse unendlich vieler Efron-Würfelringe, die sich hinsichtlich der Gewinnwahrscheinlichkeiten ebenso wie der ursprüngliche Efron-Würfelring verhalten. Man kann auch mit dieser Repräsentation gut arbeiten.

Sicherlich werden bei der Arbeit in für die Teilnehmer zumindest subjektiv neuen Problemfeldern nicht ständig neue und erfolgversprechende Repräsentationen gefunden . Will man trotzdem in diesem Feld Erfahrungen sammeln lassen, kann man selbst verschiedene Darstellungsformen eingeben und die Teilnehmer mit diesen experimentieren lassen.

Literatur

[1] A. Büchter: Ein Spiel mit Würfeln. In Praxis der Mathematik, 47(4), 2005. S. 45-46.

[2] K. Lorenz: Die Rückseite des Spiegels. Piper Verlag München 1973.

Eingegangen am 7. 2. 07

Hartmut Rehlich
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Abteilung für Didaktik
Erwin-Abbe-Platz 2
07743 Jena