

Zwei Problemfelder um zyklische Prozesse mit der Fibonaccifolge

Betrachtungen und Anregungen zur Förderung produktiven Denkens in der Lehre

von H. Rehlich, TU Braunschweig

Ein einfacher Schubfachschiuß beweist, daß die Fibonaccifolge modulo n für jedes n zyklisch ist. Aber wie lang sind die Zyklen? Eine Materialsammlung zur Mustererkennung führt schnell zu verschiedenen Hypothesen. Zu einigen werden Beweismöglichkeiten aufgezeigt, andere sind als Anregung für die Weiterarbeit in Fördergruppen oder Seminaren gedacht.

Gleiches gilt auch für das zweite Problemfeld, bei dem ein „zyklischer Auffüllprozeß“ (Modell zur Phyllotaxis) betrachtet wird. Bei diesem werden n regelmäßig angeordnete Plätze auf der Kreisperipherie (Orte für Blätter oder Kerne) nacheinander, immer um dieselbe Platzzahl k weiterschreitend – also mit einem konstanten Drehwinkel – belegt. Sind n und k Fibonaccizahlen, so zeigen sich erstaunliche Muster in der Folge des jeweils minimal vorkommenden Abstands zwischen den bis zu diesem Zeitpunkt besetzten Positionen.

1. Zu den didaktischen Rahmenvorstellungen

Ein übergeordnetes Ziel jeglicher Lehre ist die Förderung des selbständigen Denkens. Strunz (1968, S. 228) beschreibt es so:

„Das produktive Denken stellt die höchste Form aller Arten intellektueller Betätigung dar. Freilich beschränkt es sich in der Schule auf das Selbstfinden von Problemlösungen, die der Wissenschaft bereits bekannt und nur dem Jugendlichen neu sind. Aber dieser Unterschied ist rein sachlicher Natur und in unserem Zusammenhang psychologisch bedeutungslos. Das schöpferische Denken eines 13jährigen Schülers, der von selbst auf die Summenformel für

die Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis n kommt (ohne daß er vorher etwas von arithmetischen Reihen gehört hätte), ist dem Denken des Wissenschaftlers verwandt, der in mathematisches Neuland vorstößt.“

Natürlich ist produktives Denken nur auf der Basis eines hinreichenden Netzes deklarativen und prozeduralen Wissens¹ effektiv möglich² und der Aufbau eines solchen Netzes von Wissen und Fertigkeiten ist daher selbstverständlich ein zentrales Anliegen jeglichen Mathematikunterrichts. Es geht also um die richtige Balance. Die bloße Kenntnis der „Werkzeuge“ und ihrer Grundfunktionen befähigt in der Regel nicht dazu, diese in subjektiv neuen Situationen durch geeignete Sequenzierung, geschickte Handhabung oder kreative Zweckentfremdung in den Dienst eines produktiven Problemlöseprozesses zu stellen. Man kann vielleicht – ohne Widerspruch auszulösen – wünschen, daß diejenigen Lehrbemühungen (an Schulen und Hochschulen) die der Förderung des produktiven Denkens dienen, etwas verstärkt werden. Dabei ist dem Autor durchaus klar, daß diesem Wunsch die leichtere Planbarkeit und Überprüfbarkeit des Erfolges von Veranstaltungen, die den „niederen Bildungszielen“ dienen, psychologisch entgegensteht (in Bildungseinrichtungen findet letztlich – „evolutionär betrachtet“ – so etwas wie eine Minimierung gewichteter Streßsummen aller Interaktionspartner statt). Ein gangbarer Weg zur kontinuierlichen Förderung produktiven Denkens könnte es sein, in Seminaren die auch der „Wissensanhäufung“ dienen, immer wieder kleine gedankliche Spaziergänge in (mindestens subjektives) Neuland anzubieten, am besten ad hoc aus der Sache erwachsend. Dem Autor scheint es psychologisch fruchtbar, wenn es sich dabei auch für den Lehrenden um Neuland handelt und dies von den Lernenden bemerkt wird. So wird nämlich der in jeder hierarchischen Struktur reflexhaft gestellten sozial orientierten

¹ Zur Theorie der Struktur des Wissens siehe z. B. Wender (1990), Bauersfeld (1993) oder Spitzer (2002)

² Aber auch das ist manchmal zweiseitig. Man kann immer wieder beobachten, daß zuviel Wissen auch den Blick für eine kreative und elegante Lösung eines mathematischen Problems verstellen kann.

Frage „was will er von mir hören“ zugunsten der sachlichen Frage „was könnte uns weiterbringen“ ein kleiner Riegel vorgeschoben. Im Folgenden werden zwei inhaltlich sehr reichhaltige Problemfelder vorgestellt, in denen auch bei ganz unterschiedlichen Herangehensweisen gute Erfolgsaussichten für eigene Produktionen subjektiv neuer mathematischer Einsichten bestehen. Da dieses Thema noch keine besonders breite Darstellung in der mathematischen Literatur gefunden hat, bestehen sogar gute Aussichten auch objektiv neue Fragen zu stellen. Beide Problemfelder wurden vom Autor in der Begabtenförderung und in Seminaren zur Lehrerausbildung mehrfach thematisiert. Die Darstellung orientiert sich an heuristischen Gesichtspunkten. Um die didaktische Grundidee nicht zu konterkarieren, werden also keine formal ausgefeilten künstlich verkürzten Beweise vorgeführt. Anstelle dieser (auch im Unterricht notwendigen) Abschlußarbeit werden durch paradigmatische Beispiele Hinweise für Beweise gegeben.

2. Zu den Zyklenlängen der Fibonaccifolge modulo M

Betrachtet man die Fibonaccifolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ..., so fällt das gerade-ungerade-Muster „uuguuguug...“ auf. Die Folge wird zyklisch mit der Zyklenlänge $Z(2)=3$. Die Tabelle zeigt die Zyklen auch für drei und vier.

M	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	
2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	$Z(2) = 3$
3	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	$Z(3) = 8$
4	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	$Z(4) = 6$

Natürlich braucht man die Fibonaccifolge mit ihren großen Zahlen nicht, um die Folge modulo M hinzuschreiben, man startet einfach mit $f_0=1$ und $f_1=1$ und rechnet mit der Rekursion $f_n \equiv f_{n-1} + f_{n-2}$ modulo M. Daß die Folge für jedes M zyklisch wird, zeigt ein ganz einfacher Schubfachsluß: Es gibt nur M^2 Zweierkombinationen bei M Restklassen, also müssen nach spätestens M^2 Schritten wieder zwei Einsen hintereinanderstehen und alles beginnt von vorn.

Für $M = 11$ erhält man die Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1,.. mit der Zyklenlänge 10. Das liegt beträchtlich unter der vom Schubfachscluß angezeigten Grenze 121. Man kann also neugierig werden und die folgende Liste betrachten und in dieser mit Muße nach Mustern suchen.

n	Z(n)	n	Z(n)	n	Z(n)	n	Z(n)	n	Z(n)
0		40	60	80	120	120	120	160	240
1		*41	40	81	216	121	110	161	48
*2	3	42	48	82	120	122	60	162	216
*3	8	*43	88	*83	168	123	40	*163	328
4	6	44	30	84	48	124	30	164	120
*5	20	45	120	85	180	125	500	165	40
6	24	46	48	86	264	126	48	166	168
*7	16	*47	32	87	56	*127	256	*167	336
8	12	48	24	88	60	128	192	168	48
9	24	49	112	*89	44	129	88	169	364
10	60	50	300	90	120	130	420	170	180
*11	10	51	72	91	112	*131	130	171	72
12	24	52	84	92	48	132	120	172	264
*13	28	*53	108	93	120	133	144	*173	348
14	48	54	72	94	96	134	408	174	168
15	40	55	20	95	180	135	360	175	400
16	24	56	48	96	48	136	36	176	120
*17	36	57	72	*97	196	*137	276	177	232
18	24	58	42	98	336	138	48	178	132
*19	18	*59	58	99	120	*139	46	*179	178
20	60	60	120	100	300	140	240	180	120
21	16	*61	60	*101	50	141	32	*181	90
22	30	62	30	102	72	142	210	182	336
*23	48	63	48	*103	208	143	140	183	120
24	24	64	96	104	84	144	24	184	48
25	100	65	140	105	80	145	140	185	380
26	84	66	120	106	108	146	444	186	120
27	72	*67	136	*107	72	147	112	187	180
28	48	68	36	108	72	148	228	188	96
*29	14	69	48	*109	108	*149	148	189	144
30	120	70	240	110	60	150	600	190	180
*31	30	*71	70	111	152	*151	50	*191	190
32	48	72	24	112	48	152	36	192	96
33	40	*73	148	*113	76	153	72	*193	388
34	36	74	228	114	72	154	240	194	588
35	80	75	200	115	240	155	60	195	280
36	24	76	18	116	42	156	168	196	336
*37	76	77	80	117	168	*157	316	*197	396
38	18	78	168	118	174	158	78	198	120
39	56	*79	78	119	144	159	216	*199	22

Vor dem Weiterlesen ist es vielleicht interessant, erst einmal die Tabelle auf sich wirken zu lassen (man entdeckt dabei im Voraus die im Folgenden beschriebenen Muster und vielleicht auch weitere).

2.1 Der Musterreichtum sichert schnelle Anfangserfolge

Auf den ersten Blick scheinen die Zyklenlängen recht regellos zwischen großen und kleinen Zahlen hin- und herzuspringen, aber bald schälen sich – neben dem schon markierten – doch verschiedene Muster heraus, von denen einige hier durch Beispiele sichtbar gemacht werden:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } Z(2) = 3 \quad Z(5) = 20 \quad \rightarrow \quad Z(10) = 60 \\
 \quad \quad Z(4) = 6 \quad Z(49) = 112 \quad \rightarrow \quad Z(196) = 336
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 2 \cdot 5 = 10, \quad 3 \cdot 20 = 60 \\
 4 \cdot 49 = 196, \\
 336 = \text{kgV}(6, 112)
 \end{array} \right.$$

Muster 1: $Z(a \cdot b) = Z(a) \cdot Z(b)$, falls $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(Z(a), Z(b)) = 1$

Muster 2: $Z(a \cdot b) = \text{kgV}(Z(a), Z(b))$, falls $\text{ggT}(a, b) = 1$

Das in der Tabelle markierte Beispiel drückt für gewisse Fälle Linearität aus. Das zweite Beispiel bringt zunächst einen „Musterbruch“, der durch das verallgemeinerte Muster 2 jedoch „repariert“ werden kann.

$$\text{b) } Z(22) = 30 \quad Z(33) = 40 \quad \rightarrow \quad Z(66) = 120 \quad \text{kgV}(22, 33) = 66$$

Muster 3: $Z(\text{kgV}(a, b)) = \text{kgV}(Z(a), Z(b))$

Im Findungsprozeß steht diese Verallgemeinerung in der Regel an letzter Stelle. Die anderen Muster springen schneller ins Auge. Die Allgemeingültigkeit dieser Zusammenhänge ist leicht zu begründen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{c) } & Z(2) = 3 & \rightarrow & Z(4) = 6 & \rightarrow & Z(8) = 12 & \rightarrow & Z(16) = 24 \\
 & \searrow & & \nearrow & \searrow & & \nearrow & \\
 & \cdot 2 & & \cdot 2 & \cdot 2 & & & \\
 & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & & & \\
 & Z(3) = 8 & \rightarrow & Z(9) = 24 & \rightarrow & Z(27) = 72 & \rightarrow & Z(81) = 216, \\
 & \searrow & & \nearrow & \searrow & & \nearrow & \\
 & \cdot 3 & & \cdot 3 & \cdot 3 & & &
 \end{array}$$

Man kann **Muster 4** abheben: $Z(p^a) = p^{a-1} \cdot Z(p)$ für Primzahlen p.

Durch Muster 4 wird eine ganz entscheidende Vermutung ausgedrückt, die zusammen mit Muster 2, zu einer Berechnungsmöglichkeit der Zyklenlänge der Fibonaccifolge modulo M führt. Man zerlegt M in seine Primfaktoren und erhält die Vermutung:

$$Z(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}) = \text{kgV} \dots$$

Wenn Muster 4 allgemeingültig ist, kann man Z(M) also direkt aus den Zyklenlängen der Fibonaccifolge modulo der Primfaktoren von M berechnen.

2.2 Komplexere Zusammenhänge um Muster 4

Muster 4 ist also wichtig. Wie kann man sich mit ihm vertraut machen und wie kann man zum Beweis vorgehen? Man schaut sich erst einmal genau ein konkretes Beispiel an, wobei die Folge mod 3 mit der Folge mod 9 verglichen wird:

Wir bezeichnen die n-te Fibonaccizahl mit f(n) und starten mit f(0) = f(1) = 1.

Index n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Folge modulo 3	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1
Folge modulo 9	1	1	2	3	5	8	4	3	7	1	8	0	8	8	7	6	4	1	5	6	2	8	1	0	1	1

Die Fibonaccifolge modulo 3 beginnt bei f(8) von vorn. Nun ist f(8) ≡ 7 mod 9 und 7 = 2·3+1. Eine Zyklenlänge modulo 3 weiter steht eine 4 und das ist offensichtlich 4·3+1 modulo 9. Wiederum einen Achtersprung weiter finden wir die 1 und diese ist 6·3+1.

Es ist offensichtlich, daß eine „Langschrittformel“ für die Fibonaccifolge bei der Analyse gute Dienste leisten würde. Zur Findung einer solchen Formel schauen wir auf den Beginn der Folge:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Wir greifen uns zwei benachbarte Fibonaccizahlen, hier die 13 und die 21, heraus. Die Folgezahl erhalten wir natürlich als Summe dieser beiden Zahlen.

Also: $34 = \mathbf{1} \cdot 13 + \mathbf{1} \cdot 21$. Die Rekursionsformel der
 Fibonaccifolge führt dann auf $55 = \mathbf{1} \cdot 13 + \mathbf{2} \cdot 21$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{als Skalarprodukt geschrieben:} \\ 89 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \end{pmatrix} \end{array} \right.$
 und weiter auf $89 = \mathbf{2} \cdot 13 + \mathbf{3} \cdot 21$.

Man entnimmt die Rekursionsformel: $f_{n+k} = f_{n-1} \cdot f_{k-1} + f_n \cdot f_k$ und kann diese leicht durch vollständige Induktion beweisen.

Einen anderen heuristischen Zugang zu dieser Formel (und weiteren) bieten 2x2 Matrizen (man braucht dazu keine Matrizen­theorie, es reicht völlig aus, die Multiplikationsregel zu kennen):

$$\text{Es sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \dots A^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mit } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+k} = \begin{pmatrix} f_{n+k} & f_{n+k-1} \\ f_{n+k-1} & f_{n+k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_k & f_{k-1} \\ f_{k-1} & f_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \cdot f_k + f_{n-1} f_{k-1} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

folgt daraus die Formel aus dem Vergleich der Komponenten.

$$\begin{aligned} \text{Nun sei } n = Z(p), \quad \text{also } f_{n-1} &\equiv 0 \pmod{p}, & \text{d.h. } f_{n-1} &= \alpha p \\ & & \text{und } f_n &\equiv 1 \pmod{p}, & \text{d.h. } f_n &= \beta p + 1 \end{aligned}$$

Wir nehmen an, daß kein weiteres p in α und β steckt (*sonst würde die Fibonaccifolge bei f_n auch schon bezüglich des Moduls p^2 periodisch*). Es ist klar, daß auch $f_{n-2} = \gamma p + 1$ gilt (wegen $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$).

$Z(p^2)$ kann dann nur ein Vielfaches von $Z(p)$ sein. Wir „hangeln“ uns nun mit der Rekursion immer um eine Zykluslänge n weiter und notieren die Fibonaccifolge modulo p^2 :

f_0	f_1	f_{n-2}	f_{n-1}	f_n	f_{2n-1}	f_{2n}	f_{3n-1}	f_{3n}	f_{4n-1}	f_{4n}
1	1	$\gamma p + 1$	αp	$\beta p + 1$	$2 \cdot \alpha p$	$2 \cdot \beta p + 1$	$3 \cdot \alpha p$	$3 \cdot \beta p + 1$	$4 \cdot \alpha p$	$4 \cdot \beta p + 1$

Beispiel: Wegen $f_{n+k} = f_{n-1} \cdot f_{k-1} + f_n \cdot f_k$

ist also $f_{2n+n} = f_{2n-1} \cdot f_{n-1} + f_{2n} \cdot f_n$

und somit $f_{3n} = 2 \cdot \alpha^p \cdot \alpha^p + (2 \cdot \beta^p + 1) \cdot \beta^p + 1 \equiv 3 \cdot \beta^p \pmod{p^2}$.

Die Tabellenstruktur ergibt sich also rekursiv und man sieht, daß die Fibonaccifolge modulo p^2 erst bei f_{pn} wieder mit einer 1 von vorn beginnt (vor der 1 steht die 0).

Völlig analog kann man sich mit der Rekursion dann in Sprüngen der Länge pn weiterhangeln und sehen, daß die Fibonaccifolge modulo p^3 erst nach p solcher Sprünge wieder mit der 1 von vorn beginnt. Das Argumentationsmuster setzt sich dann für die folgenden Potenzen einfach weiter fort.

Aber, wie gesagt, die Allgemeingültigkeit von Muster 4 hängt daran, daß für alle Primzahlen $Z(p^2) > Z(p)$ gilt und dafür scheint es (nach meinen Recherchen) bis heute keinen Beweis zu geben.

2.3 Anschlußfragen

Abschließend steht man vor der Frage, ob man $Z(p)$ für die Grundbausteine, die Primzahlen p direkt bestimmen kann. Hier fällt als erstes auf, daß es verschiedene „Typen“ von Primzahlen gibt (vielleicht nur endlich viele?).

$$Z(p) = \begin{cases} p-1 & 11, 19, 31, 41, 59, 61, 71, 79, 109, 131, 149, \dots \\ (p-1)/2 & 29, 89, 101, 181, 229, 349, 401, 509, 761, \dots \\ (p-1)/3 & \text{für } 139, 151, 331, 619, 661, 811, 829, 1069, \dots \\ 2(p+1) & 3, 7, 13, 17, 23, 37, 43, 53, 67, 73, 83, 97, 103, \dots \\ 2(p+1)/3 & 47, 107, 113, 263, 347, 353, 563, 677, 743, \dots \end{cases}$$

Das sieht schön geheimnisvoll aus und reizt zur Mustersuche. Die Primzahlen 2 mit $Z(2) = 3$ und 5 mit $Z(5) = 20$ fallen dabei aus dem Rahmen. Computeranalysen für größere Zahlen zeigen immer wieder diese fünf Muster, aber auch weitere Module wie etwa $Z(1151) = 230 = (p-1)/5$ oder $Z(919) = 102 = (p-1)/9$.

Die Primzahlen der ersten drei Zeilen lassen bei Division durch 5 entweder den Rest -1 oder den Rest 1, die anderen nicht. Man kann sich überlegen, daß die besondere Kürze der zugehörigen Zyklenlängen damit zusammenhängt, daß es bezüglich dieser Primzahlmodule geometrische Folgen gibt, die gleichzeitig die Rekursionsformel der Fibonaccifolge erfüllen (5 ist quadratischer Rest für diese Module). Hier ist ein Beispiel für $p = 11$ und $f_0 = 1$:

1	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1	4
	=4·1	=4·4	=4·5	=4·9	=4·3						

Die fortgesetzte Multiplikation mit 4 erzeugt also eine Lukasfolge (Fibonaccifolge mit anderen Startwerten). Bei der Suche nach solchen Folgen stößt man zwanglos auf das charakteristische Polynom der Fibonaccifolge: Man nimmt o.B.d.A. $f_0=1$, benennt $f_1=x$ und fordert $f_2 = 1+x$ und gleichzeitig $f_1 = x \cdot x$, also $1+x=x^2$. Modulo 11 existieren die beiden Lösungen 4 und 8. Für $f_1 = 8$ erhält man die Lukasfolge 1 8 9 6 4 10 3 2 5 7 1 8 ...

Die Fibonaccifolge kann dann aus den beiden geometrischen Folgen linear kombiniert werden. Da für die Zyklenlängen geometrischer Folgen in endlichen Gruppen aber natürlich nur Teiler der Gruppenordnung in Frage kommen, ist die Zyklenlänge durch $p-1$ „nach oben gedeckelt“.

Im betrachteten Beispiel sind die Zyklenlängen der beiden geometrischen Lukasfolgen 5 und 10 und daher ist die Zyklenlänge der Fibonaccifolge also 10.

Man erkennt hieran, daß es eine gute Fragestellung ist, *welche Zyklenlängen bei den geometrischen Lukasfolgen bei welchen Primzahlmodulen p vorkommen*. Man überlegt sich leicht, daß es stets nur zwei geben kann.

Hinsichtlich der Primzahlmodule für die die Gleichung $1+x=x^2$ nicht lösbar ist, fällt auf, daß die Zyklenlängen Teiler der Ordnung der multiplikativen Gruppe des endlichen Körpers aus p^2 Elementen ($\mathbb{Z}(p)$ adjungiert x) sind.

In diesem Problemfeld können mit etwas „Fingerspitzengefühl“ und Phantasie sicherlich interessante Teilaspekte gefunden werden, in denen auch nicht auf Zahlentheorie spezialisierte mathematisch interessierte Menschen nicht nur „subjektiv neue“ Erkenntnisse oder Begründungen alter Erkenntnisse finden können. Man muß ja nicht gleich versuchen, für alle Primzahlen p die Zyklenlänge $Z(p)$ als Formel anzugeben. Hier sind noch ein paar interessante Beispiele zu sehen:

Für die Fibonaccifolge modulo 5 gilt $Z(5) = 20$:

$$\boxed{1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 3 \ 3 \ 1 \ 4 \ 0 \ 4 \ 4 \ 3 \ 2 \ 0 \ 2 \ 2 \ 4 \ 1 \ 0} \ 1 \ 1$$

Die Zyklenlänge der einzigen (!) geometrischen Lukasfolge modulo 5 ist 4:

$$\boxed{1 \ 3 \ 4 \ 2} \ 1 \ 3 \ 4 \ 2$$

Es gibt nur diese eine geometrische Lukasfolge, da die Gleichung $1 + x = x^2$ modulo 5 nur eine einzige Lösung (ausprobieren!) hat.

Modulo 7 gibt es keine geometrischen Lukasfolgen, da $1+x=x^2$ im Restklassenkörper N_7 nicht lösbar ist. Wir konstruieren einen größeren Zahlkörper mit den Elementen $a + bx$, wobei a, b aus N_7 sind und x sei Lösung der Gleichung $1 + x = x^2$ (welche ja nicht in N_7 liegt!). Man rechnet leicht nach, daß diese Elemente wieder einen Körper bilden. Wir zeigen nun, daß die geometrische Folge $x_n = x^n$ modulo 7 die Zyklenlänge 16 hat:

Zyklenlänge 16 heißt: $x^{16} = x^0 = 1$. Wegen $1+x=x^2$ gilt $x^{16} = (1+x)^8$. Mit Hilfe der binomischen Formel rechnet man weiter: $(1+x)^8 = 1 + x + x^7 + x^8$.

Man betrachte das Pascaldreieck modulo 7 auf der folgenden Seite!

$$\begin{aligned} \text{Nun ist} \quad & 1 + x + x^7 + x^8 = 1 + x + x(1+x)^3 + (1+x)^4 \\ &= 1 + x + x + 3x^2 + 3x^3 + x^4 + 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \\ &= 2 + 6x + 9x^2 + 7x^3 + 2x^4 = 2 + 6x + 2x^2 + 2x^4 \\ &= 2 + 6x + 2(1+x) + 2(1+x)^2 = 4 + x + 2 + 4x + 2x^2 \\ &= 6 + 5x + 2 + 2x = 8 + 7x = 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise sieht auf den ersten Blick nicht leicht verallgemeinerbar aus. Das ändert sich, wenn wir den Zahlkörper \mathbb{N}_7 nicht gleich um eine komplette Lösung der charakteristischen Gleichung $1+x=x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ erweitern,

sondern um den „Baustein“ $x = \sqrt{5}$. Für den positiven Fall haben wir dann zu zeigen, daß $\frac{(1+\sqrt{5})^{16}}{2^{16}} = 1$ gilt.

Dazu formt man um:
$$\frac{(1+\sqrt{5})^{16}}{2^{16}} = \frac{(6+2\sqrt{5})^8}{2^8 \cdot 2^8} = \frac{(3+\sqrt{5})^8}{2^8}$$

Der Nenner ist (wegen des kleinen Satzes von Fermat) eine 4. Der Zähler wird mit Hilfe der binomischen Formel ausmultipliziert, dabei hilft das Pascaldreieck modulo 7:

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		3		3		5		1	
1		6		1		6		1		6		1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$$(3+\sqrt{5})^8 = (3+\sqrt{5})^7 \cdot (3+\sqrt{5}) = (3^7 + \sqrt{5}^7) \cdot (3+\sqrt{5}) = (3+5^3\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})$$

Wieder folgern wir aus dem „kleinen Fermat“, daß $3^7 = 3$ gilt. Für 5^3 kommt nur 1 oder -1 in Frage (das ist wiederum eine Folgerung aus dem „kleinen Fermat“). Wir haben Glück (?), $125 \equiv -1 \pmod{7}$. Damit ist dann

$$(3+\sqrt{5})^8 = (3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5}) = 4 \text{ und somit – wie erhofft – } \frac{(1+\sqrt{5})^{16}}{2^{16}} = 1.$$

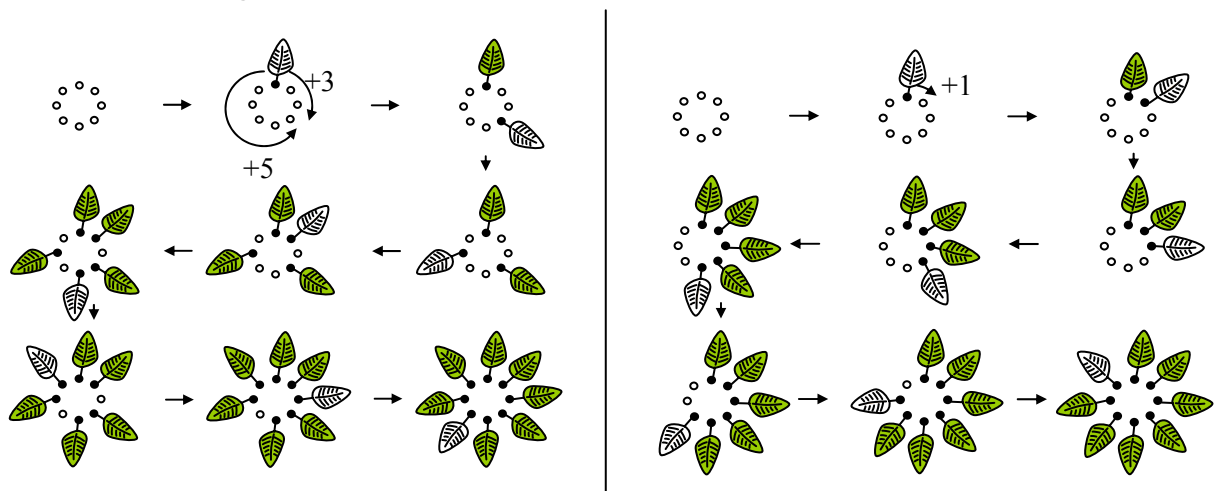
Dieser Beweis für $\frac{(1+\sqrt{5})^{16}}{2^{16}} = 1$ sieht verallgemeinerbar aus, denn für beliebige Primzahlen p gilt der „kleine Fermat“ und das Pascaldreieck hat für beliebige Primzahlen p stets diese besondere Struktur. Man muß also offensichtlich nur über den Term $5^{(p-1)/2}$ etwas nachdenken.

3. Modellbildung „optimale Phyllotaxis“

Angeregt durch die Information, daß die Phyllotaxis der Sonnenblume der Goldene Winkel sei – also $360^\circ/\Phi$, ungefähr $222,5^\circ$, das entspricht $137,5^\circ$ in der Gegenrichtung – (man liest bei verschiedenen Autoren die Hypothese, daß damit eine gute Platznutzung einhergehe) kann man auf die Idee kommen, den folgenden zyklischen Auffüllprozeß zu betrachten.

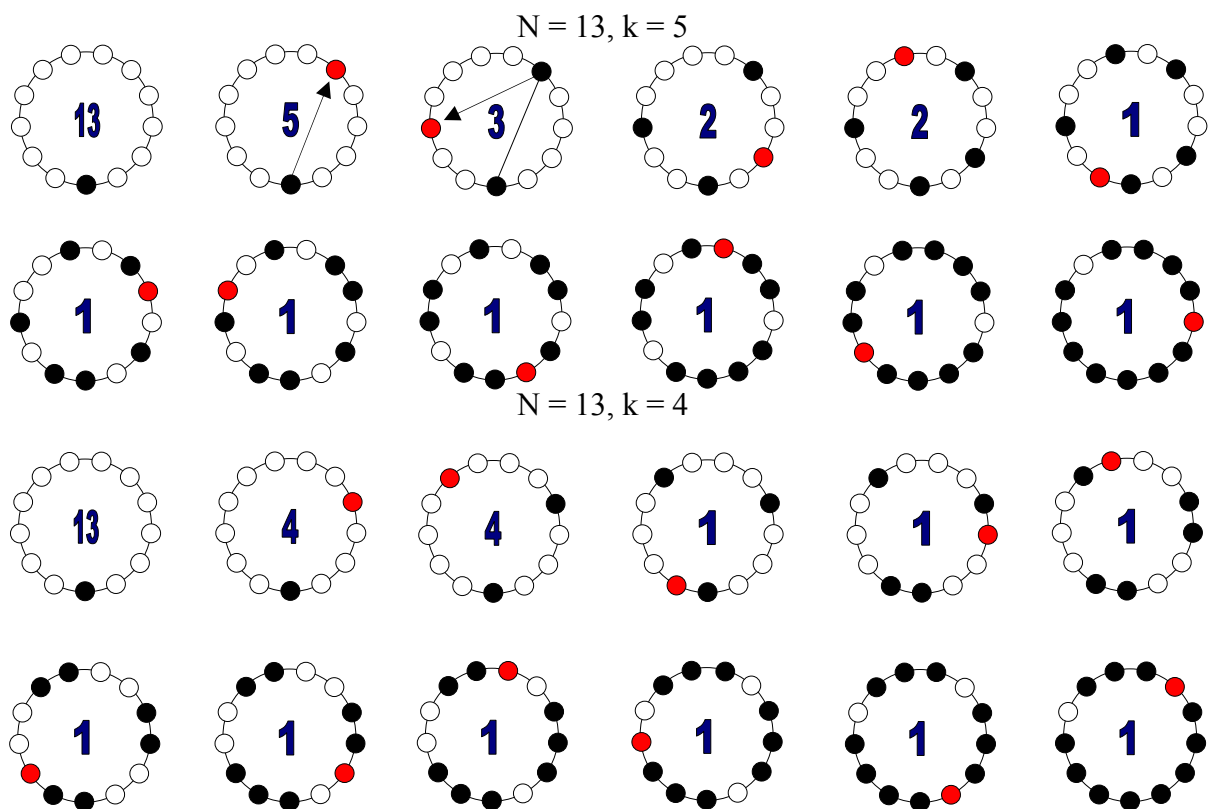
3.1 Die heuristische Phase: Mustersuche im Beispielmateral

Man ordnet eine gewisse Anzahl N von freien Plätzen zyklisch an und füllt diese dann – stets um dieselbe Schrittzahl k in eine Richtung weitergehend – zyklisch auf (man läßt dort ein Blatt oder einen Kern wachsen). Das linke Bild zeigt diesen Auffüllprozeß für $N = 8$ und $k = 5$ bzw. $k = 3$. Das jeweils neu hinzugekommene Blatt ist jeweils heller dargestellt. Bei Fibonaccizahlen, lassen sich mathematisch besonders interessante Zusammenhänge vermuten, da der Quotient aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen die Goldene-Schnitt-Zahl ist.



Bei dem links dargestellten Prozeß ist der Drehwinkel also 135° (bzw. 225° gegen den Uhrzeigersinn) und somit wird der Goldene Winkel schon ganz gut approximiert. Welche biologischen Vorteile bzw. mathematischen Besonderheiten damit verbunden sein könnten, ist an diesem kleinen Zahlenbeispiel noch nicht zu sehen. Insbesondere bleibt es noch *begrifflich unscharf*, was eine gute Platznutzung bedeuten könnte, bzw. wie man diese mathematisch modellieren kann.

Rechts davon ist der Auffüllprozeß bei einem Drehwinkel von 45° dargestellt. Die Zwischenstadien zeigen unharmonisch wirkende Zustände, die Blätter sind aufeinandergeballt, es sieht nicht nach guter Raumnutzung aus. Wir betrachten nun noch zwei weitere Auffüllprozesse und zwar für $N = 13$ und $k = 5$ bzw. $k = 4$. Die dekorativen Blätter werden im Folgenden weggelassen. Im Kreisinneren wird der *minimal vorkommende Abstand zwischen den bis zu diesem Stadium besetzten Plätzen* notiert.



Schon an diesem kleinen Beispiel fallen mindestens zwei interessante Strukturen ins Auge. Wir vergleichen die Folgen der minimal vorkommenden Abstände $A(i)$ bis zur Besetzung des i -ten Platzes:

N	k	i =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13	4	$A(i)$	13	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	5	$A(i)$	13	5	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
				1	1	2		3			5				

Beobachtung 1:

Betrachtet man die Folge der $A(i)$ für $N = 13$ und $k = 5$ für sich allein, so fällt zunächst auf, daß alle Folgenglieder Fibonaccizahlen sind und zwar lückenlos absteigend ab $f = 5$. *Darüber hinaus ist die Häufigkeit des Auftretens der Fibonaccizahlen selbst wieder eine Fibonaccizahl.*

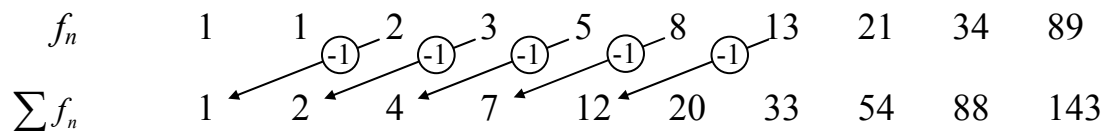
Beobachtung 2:

Die Platznutzung ist für $k = 5$ in einer bestimmten Weise besser als für $k = 4$. Ab $i = 4$ ist der minimal vorkommende Abstand $A(i)$ für $k = 5$ stets größer oder gleich als der minimal vorkommende Abstand $A(i)$ für $k = 4$.

Beobachtung 2 führt auf die Ausgangsfrage zurück. Denkt man nämlich an das Wachstum von Pflanzenteilen (z. B. an Sonnenblumenkerne), so paßt die Idee einer guten Platznutzung ja durchaus zur Annahme, daß Selektionsprozesse für die Entwicklung der Phyllotaxis einer Pflanzensorte eine Rolle spielen und man aus diesem Grunde den Goldenen Winkel bei der Sonnenblume findet. Eine erste „naive Präzisierung guter Platznutzung“ könnte darin bestehen, zu fordern, daß der jeweils neu hinzukommende Kern in der größten noch vorhandenen Lücke wächst. Daß dieser Modellansatz aber nicht auf den Goldenen Winkel führt, erkennt man an dem Eingangsbeispiel für $N = 8$ und $k = 1$: Der neu besetzte Platz liegt für $k = 1$ automatisch in der größten noch vorhandenen Lücke, aber eben *am Rand*, in direkter Nachbarschaft des vordem hinzugekommenen Kerns, also in bedrängender Enge. Aus Beobachtung 2 dagegen könnte ein **1. Modell für „gute Platznutzung“** in diesem diskreten Wachstumsmodell abgehoben werden: Eine Phyllotaxis a ist besser als eine Phyllotaxis b , falls es für den Auffüllprozeß ein i gibt, ab dem der Minimalabstand der Blätter $A(i)$ für a stets größer oder gleich dem Minimalabstand der Blätter $A(i)$ für b ist. Alternativ könnte man auch fragen wann das erste Mal ein Platz in direkter Nachbarschaft zu ei-

nem schon besetzten Platz besetzt wird und die Phyllotaxis als besser bezeichnen, bei der dies später geschieht (**2. Modell**).

Daß Beobachtung 1 „kein Zufall sein kann“ wird heuristisch durch den Umstand gestützt, daß die Summe von Fibonaccizahlen f_i bis zu einer bestimmten Stelle n um eins kleiner als die übernächste Fibonaccizahl f_{n+2} ist und das paßt bestens zur Beobachtung.



Diese Passung stützt also die Annahme, auf dem richtigen Wege zu sein. Es entsteht also Bedarf für eine größere Datensammlung. Eine Analyse mit Hilfe eines kleinen Computerprogramms brachte die folgenden Ergebnisse und zeigt, daß die ästhetische Struktur sich fortsetzt:

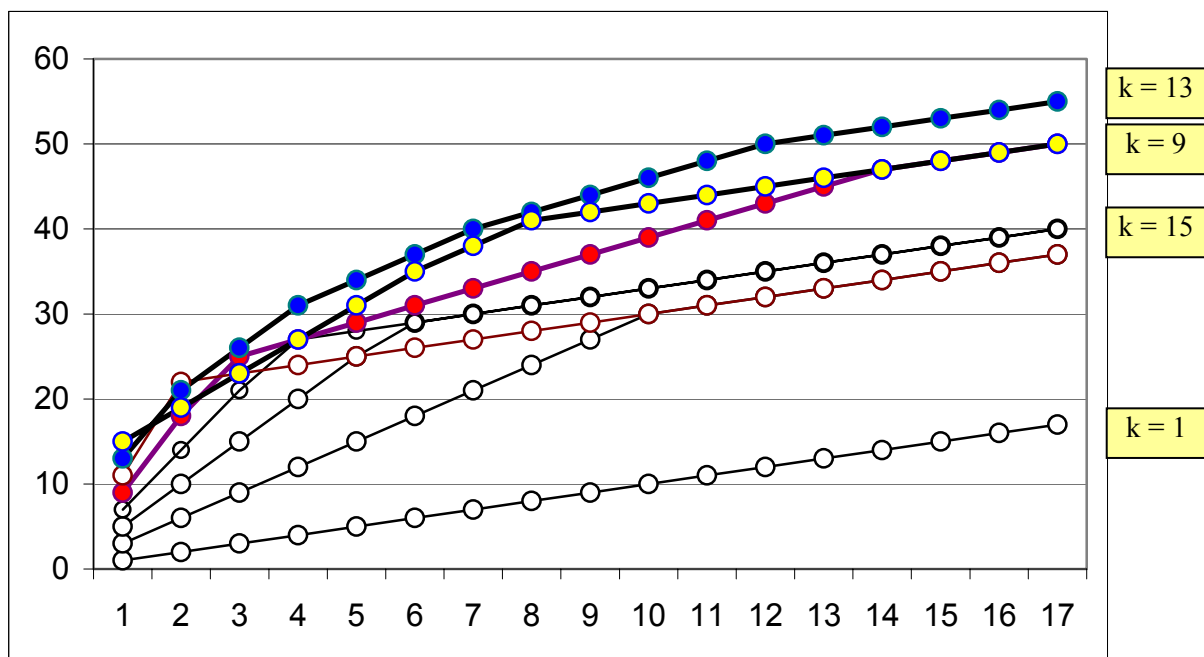
Folge der kleinsten aktuell vorkommenden Abstände während des Auffüllprozesses											
N = 21, k = 8:	21	8	5	3	3	2	2	2	1	1	1
N = 34, k = 13	34	13	8	5	5	3	3	3	2	2	2
			1	1	1	1	1	1	1	1	1
N = 55, k = 21	55	21	13	8	8	5	5	5	3	3	3
			1	1	1	1	1	1	1	1	1

3.2 Wie es weitergehen kann - Beweise und Modellierungen

Zunächst wird man beweisen, daß das in den Beispielen gefundene Muster allgemeingültig ist. Nach dieser Arbeit wird man verschiedene Modellierungen dafür, in welchem Sinne dieser Auffüllprozeß eine besonders gute Raumnutzung sichert, gegeneinander abwägen und prüfen.

Keines der beiden schon angesprochenen Modelle führt zum gewünschten Ziel. Als erfolgversprechend hat sich schließlich herausgestellt, die Folge der Partial-

summen der im Auffüllprozeß minimalen Abstände zu betrachten. Die Graphik zeigt das Ergebnis einer solchen Analyse (für $N = 34$).



Es reicht natürlich, zu N teilerfremde k zu betrachten.

Die Glieder der Folge der Partialsummen sind für Winkel, die nah am Goldenen Winkel liegen, besonders groß ($13/34$ ist ja das „Gegenstück“ zu $21/34$, nur eben anders herum den Kreis abschreitend). Das heißt, übersetzt für das Pflanzenwachstum: Über den gesamten Wachstumsprozeß ist die „durchschnittliche gegenseitige Bedrängung“ besonders klein. Für die genauere Vorstellung dieses erfolgversprechenden Modellierungsansatzes fehlt hier der Platz. Man kann weitere Informationen dieser Fragestellung auf der Homepage des Autors nachlesen. Dort findet man auch ein Computerprogramm zur „experimentellen Mathematik“, das man für eigene Untersuchungen herunterladen kann.

4. Abschließende Bemerkungen zur Didaktik

Zur Verbesserung der Unterrichtsqualität, scheint eine Veränderung einer in der Gesellschaft weitverbreiteten inneren Haltung (die in der Regel auf „Standarderfahrungen“ beruht) und den Lehrer eher als „belehrende Instanz“ sieht, wichtig zu sein. Diese Haltung ist oft sehr stabil und allein durch das „Lehren didakti-

scher Theorien“ wohl kaum zu verändern (diese Form würde – wenn sie allein stünde – zudem den Inhalt dieser Theorien konterkarieren). Hier müssen wohl eher *positive Selbsterfahrungen* anderer Art gesammelt werden. Diese sollten sich nicht (nur) auf die Arbeit an isolierten Einzelproblemen (wie bei Wettbewerben) beziehen, sondern in die Aneignung des „Standardstoffes“ eingebettet sein (sonst würde unterschwellig transportiert, daß produktives Denken im Normalunterricht eben doch keinen Platz haben kann).

Die vorgestellten Problemfelder können durch ihre hohe Anschaulichkeit und einen gewissen mathematischen Beziehungsreichtum allein durch das bloße Betrachten von Beispielen mathematische Assoziationen auf den Plan rufen und somit eine hohe Motivationskraft haben. Dabei schätzt der Autor den heuristischen Wert des „Aufsichwirkenlassens von Bildern“ (im weiteren Sinne gehören dazu auch Tabellen und überhaupt alle Visualisierungen struktureller Zusammenhänge) in der Anfangsphase eines Problemlöseprozesses sehr hoch ein. Konrad Lorenz (1973) beschreibt in seiner Naturgeschichte menschlichen Erkennens die beeindruckenden Leistungen eines unterhalb der Ebene bewußten Denkens im wahrnehmenden Geist arbeitenden Klassifizierungs- und Abstraktionsapparats³ zur Mustererkennung. Es erscheint dem Autor lohnenswert, zur Motivation der Lernenden zu versuchen, einen kleinen Teil dieser Leistungsfähigkeit für die Mustererkennung und Anregung der Intuition bei der Arbeit an mathematischen Problemen zu nutzen. Dieser heuristisch orientierten Arbeit soll sich dann in der Regel natürlich eine „ergebnissichernde formalmathematische Arbeit“ anschließen.

Literatur:

³ K. Lorenz spricht u. a. von ratiomorphen Prozessen, die z. B. schon sehr früh kleine Kinder befähigen, unabhängig von den jeweiligen sehr unterschiedlichen Erscheinungsformen verschiedener Hunderassen und bevor alle diese Erscheinungsformen schon einmal gesehen wurden, deren Mitglieder korrekt in das abstrakte Schema Hund einzuordnen. Der Autor hält es für denkbar, daß auch die sogenannte mathematische Intuition zum Teil auf ähnlichen unbewußt ablaufenden Musterkonstruktionen fußt.

Bauersfeld, H.: *Fundamental Theories for Elementary Mathematics Education.*

In: de Lange et al. 1993, S. 69-82

Lorenz, K.: *Die Rückseite des Spiegels.* Piper Verlag München 1973.

Scheidgen, H., Strittmatter, P., Tack, W. (Hrsg.): *Information ist noch kein Wissen.* Psychologie heute TB, Bd. 536, Beltz, Weinheim - Basel 1990.

Spitzer, M. *Lernen.* Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg, Berlin 2002

Strunz, K.: *Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht.* Quelle & Meyer, Heidelberg 1968

Wender, K.F.: *Wissen und Können ist zweierlei.* In: Scheidgen, Strittmatter 1990, S. 37

Homepage des Autors mit Computerprogrammen zum zweiten Thema:

<http://www.minet.uni-jena.de/~hrehlich/Programme/INDEX.HTM>