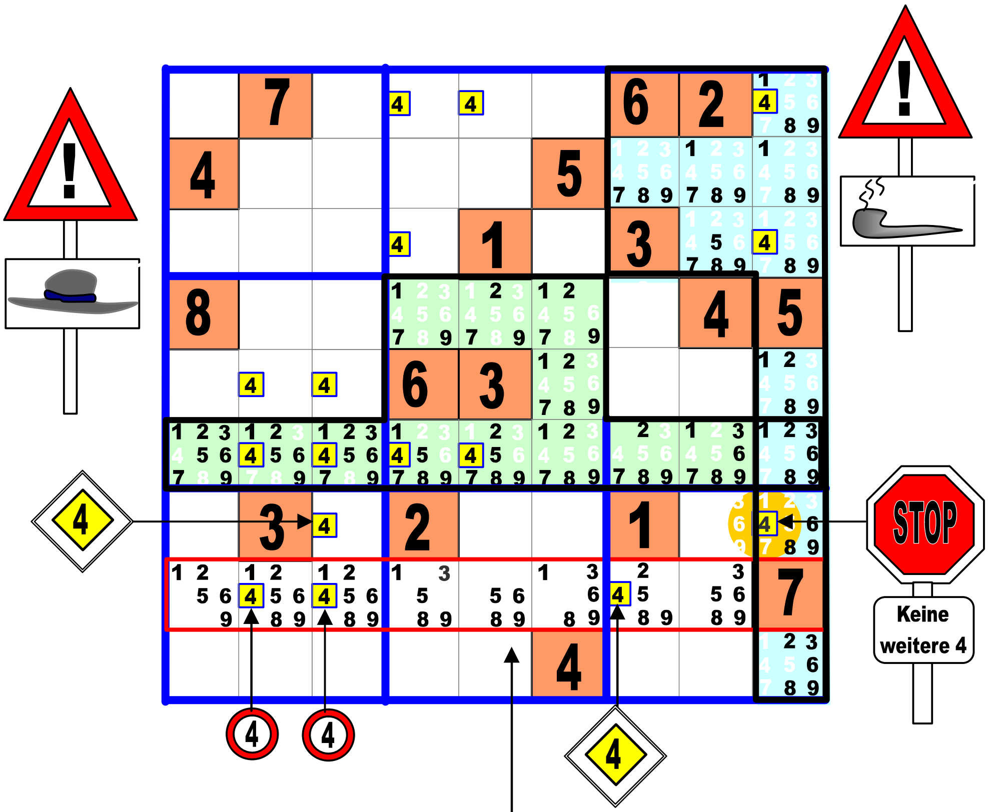
Sudoku und Mathematik

SuMa 2.2

Strategietrainer und mathematisch orientiertes Programm zum Analysieren, Bearbeiten und Erfinden von Sudoku-Rätseln und neuen Varianten.

Hartmut Rehlich, Friedrich-Schiller-Universität Jena



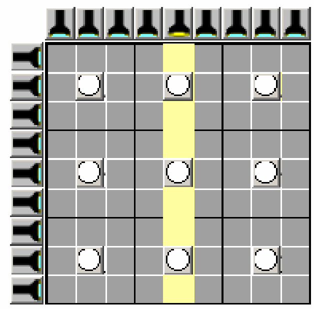
Ratefelder:

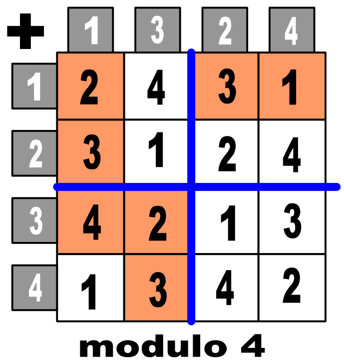
stufenlos verstellbare Helligkeit

freie Farbmarkierung

individuell auszublenden

programmierte Mustersuche





Systemvoraussetzungen und Installation:

Windows 95, 98 oder XP. Das Programm belegt nur sehr wenig Speicherplatz (weniger als 1 MB). Installation: setup.exe.

Das Programm kann aber auch **ohne Installation** direkt vom Datenträger durch einen Doppelklick auf SuMa.exe gestartet werden. In diesem Fall müssen eventuell die Dateien TABCTL32.OCX und COMDLG32.OCX vorher in den Ordner C:/WINDOWS/SYSTEM kopiert werden (das sind Steuerelemente für Windows-Programme). Weitere Informationen findet man im Anhang.

Inhalt

Vorwort **4**

1. Kurzvorschau: Einige interessante Fragen zu Sudoku und Bemerkungen zum Computerprogramm

1.1 Sudoku Rätsel 5
1.2 Mini-Sudoku 5
1.3 Doppel-Sudoku 6
1.4 Zur „Geschichte“ dieses Programms 7
1.5 Additionstafeln und Sudoku - ein neuer Rätseltyp 7

2. Sudoku – Lösungsstrategien und mathematische Untersuchungen

2.1 **Lösungsstrategien –** Einsiedler, Pfeifen, Hüte, Gitter, Querschläger u. A. 9

Bei einfachen Sudoku-Rätseln kommt man im Wesentlichen oft mit 2 miteinander verwandten Lösungsstrategien aus: Man sucht nach Einsiedlerzahlen (= auf einem Feld kann nur eine Zahl stehen), oder nach Zahlen mit nur einem Zuhause (eine Zahl kann nur auf einem Feld stehen). Was macht man, wenn diese Strategien und selbst ihre Verallgemeinerungen allein nicht ausreichen (und man ungern raten und probieren möchte)?

2.2 **Kombinieren und Zählen –** mathematische Vergnügungen 21

Zählen ist nicht immer leicht! Man findet hier einfache und sehr schwierige Zählprobleme zu Sudoku. Dabei wird deutlich, daß die Beantwortung vieler Fragen zu Anzahlen ganz wesentlich davon abhängt, welche Zählobjekte als verschieden betrachtet werden sollen.

2.3 **Summen-Sudoku –** seltsame Rechenweisen 29

Mathematiker beschäftigen sich seit Jahrhunderten mit besonderen quadratischen Mustern aus Zahlen: z.B. mit magischen Quadrate, lateinischen Quadrate oder Gruppentafeln (letztere gehören zur „neueren Mathematik“ und legen Additionsregeln für „zahlähnliche Objekte“ fest). Zu allen diesen etablierten mathematischen Objekten gibt es Querbezüge zu Sudoku. Die Beschäftigung mit Gruppentafeln führt zu einer neuen Variante von Sudoku und interessanten mathematischen Betrachtungen und z. T. ungelösten Fragen.

3. Offene Fragen 36

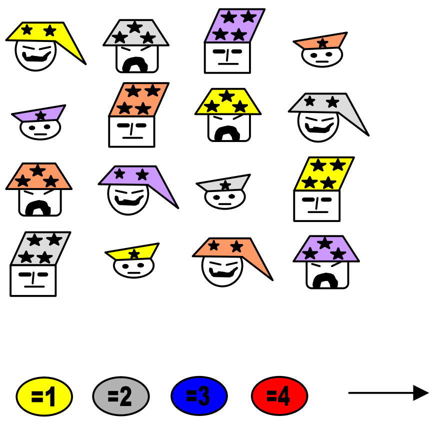
4. Das Computerprogramm

4.1 Das Spielfeld 39
4.2 Handwerkzeuge 39
4.3 Algorithmen 40
4.4 Spielvorgabe „per Hand“ bearbeiten 43
4.5 Permutation 44
4.6 Zur Installation 45
4.7 Die Menüleiste 45

Vorwort

Es wird berichtet, daß Leonhard Euler (1707-1783) der ab 1766 in St. Petersburg arbeitete, von der Zarin Katharina der Großen, folgende Aufgabe gestellt wurde:

> Aus 6 Regimentern werden 6 Offiziere mit unterschiedlichem Rang gewählt. Ist es möglich, diese 36 Offiziere in einem 6×6-Karree so aufzustellen, daß in jeder Reihe bzw. in jeder Spalte jeder Rang genau einmal vorkommt und je ein Offizier aus jedem Regiment?



Das Bild links zeigt eine Lösung der Aufgabe für vier Regimenter (Farben).
Achtet man nur auf die Ränge (=Anzahl der Sterne) oder nur auf die Farben (die man auch einfach durch Zahlen von 1 bis 4 wiedergeben kann), so erkennt man, daß die Überlagerung zweier Mini-Sudokus dieses Problem löst (sie leistet sogar mehr: auch in jedem Unterquadrat kommt sowohl jedes Regiment, als auch jeder Rang vor.

12	43	34	21
31	24	13	42
23	32	41	14
44	11	22	33

=

1	4	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3

+

2	3	4	1
1	4	3	2
3	2	1	4
4	1	2	3

Die Beschäftigung mit „magischen" Zahlenmustern gehört nicht erst seit Euler zur „ernsthaften Mathematik" und hat inzwischen zu einer Fülle interessanter Sätze und Verfahren geführt, die man z. B. in Kombinatorikbüchern nachlesen kann. Euler beschäftigte sich seinerzeit u. a. mit „lateinischen Quadraten", die - ebenso wie Sudokus - in jeder Zeile und jeder Spalte – aber nicht in jedem Unterquadrat – jede Zahl von 1 bis n genau einmal enthalten.

Sudoku-Zahlenrätsel sind offensichtlich für sehr viele Menschen so reizvoll, daß sie sich stundenlang freiwillig mit typischen Denkübungen kreativer Mathematiker wie Euler befassen (auch wenn sie dabei in der Regel natürlich nicht die Entwicklung neuer Theorien im Sinn haben): Zahlen werden spielerisch „jongliert", in konkreten Beispielen wird nach Mustern gesucht, Hypothesen werden aufgestellt und überprüft, es wird „vorwärts und rückwärts gedacht", mathematisch argumentiert, etc. Diese Motivationsquelle kann für einen problemorientierten Unterricht im Sinne POLYAS genutzt werden. Auf den folgenden Seiten werden einige Anregungen und Aufgaben vorgestellt, die die mathematische Beschäftigung in ganz verschiedene Richtungen führen können (man kann sagen: „von der Grundschule bis zur Universität"). Neben den naheliegenden kombinatorischen Fragen zu Lösungsstrategien findet man auch Zahlentheoretisches und Algebraisches .

Das Computerprogramm bietet – neben seinem Spielcharakter – vielseitige Werkzeuge zur mathematikorientierten Betrachtung unterschiedlicher Strukturen beim Sudoku und regt selbständige experimentelle Zugänge zu wichtigen mathematischen Themenfeldern an.

Dazu ein weiteres Beispiel:
Das ausgefüllte Mini-Sudoku erzeugt man einfach dadurch, daß man die „Randzahlen" addiert. Ergebnisse über 4 werden um 4 reduziert (aus 6 wird beispielsweise 2). **Dieses Sudoku-Quadrat ist also eine Additionstafel (bzw. „Gruppentafel der Divisionsreste modulo 4")**. Man kann sich fragen, ob – eventuell nach einer geeigneten Permutation – jedes (oder wie viele) Sudokus (auch im 9x9-Format) auf entsprechende Weise erzeugbar sind.

+	1	4	3	2
1	2	5≡1	4	3
3	4	7≡3	6≡2	5≡1
2	3	6≡2	5≡1	4
4	5≡1	8≡4	7≡3	6≡2

$2 + 4 = 6 \equiv 2 \bmod 4$

$2 + 1 = 3$

1. Kurzvorschau: Einige interessante Fragen zu Sudoku und Bemerkungen zum Computerprogramm

1.1 Sudoku-Rätsel

Welche Strategien führen schnell zu einer Lösung?

Kommt man ohne Probieren aus?

Ist eine selbst entworfene Vorgabe eindeutig lösbar (die rechts abgebildete ist es) und wie hoch ist der Schwierigkeitsgrad (bzw. wie kann man diesen überhaupt vernünftig „definieren“)?

Welche und wie viele der Vorgaben kann man noch weglassen?

Wie kann man Rätsel so verändern, daß sie im Schwierigkeitsgrad gleich bleiben, aber ganz anders aussehen?

1	2							9
	5	6	7					3
				2				
					7	8		
3	6	5				2		
	9						6	
			6		1			
		8		4				
9	4		5	3				

Antworten auf diese und viele weitere Fragen können mit Hilfe dieses Programms gefunden werden. Darüber hinaus können weitere mathematische Strukturen erforscht werden.

1.2 Mini-Sudoku

Interessant sind auch Mini-Sudokus. In jedem Unterquadrat, jeder Zeile und jeder Spalte sollen alle Zahlen von 1 bis 4 genau einmal vorkommen.

Wie viele Vorgabemuster gibt es? (Z. B. ist das rechts abgebildete Rätsel ein echtes Mini-Sudoku, denn es hat genau eine Lösung).

Wie viele Zahlen muß man höchstens vorgeben, wie viele mindestens?

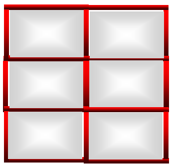
Wie viele verschiedene ganz ausgefüllte Felder gibt es überhaupt (diese bilden die Grundlage für Sudoku-Rätsel).

			1
2			4
3			

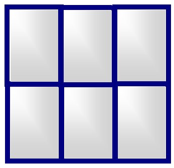
Beim Mini-Sudoku können diese und weitere Fragen durch „elementar-kombinatorisches Denken und Experimentieren mit dem Computerprogramm“ bearbeitet werden. Die dabei erfundenen Vorgehensweisen helfen bei der Analyse des 9x9-Sudokus.

1.3 Doppel-Sudoku

Diese Variante enthält weitere neue Strukturen. Da „6“ keine Quadratzahl ist, läßt sich ein 6x6-Quadrat nicht in Unterquadrate mit 6 Feldern aufteilen. Um hier etwas Entsprechendes zu schaffen, muß man 2x3-Unterrechtecke einzeichnen.



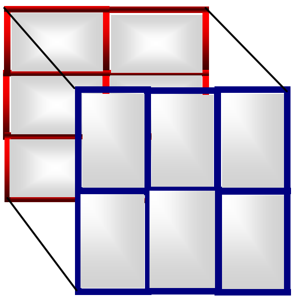
Die Bilder zeigen die beiden möglichen Aufteilungen



1		6			
				2	
	3				
		4	3		
	5				1
6				3	5

6					1
	5		3		
		4			6
		3			
				2	
	1				

Hier sollen also in jeder Zeile, Spalte und in jedem Unterrechteck die Zahlen von 1 bis 6 jeweils genau einmal vorkommen. Beide Rätsel sind lösbar (und haben wie echte Sudokus auch nur jeweils genau eine Lösung).



1		6			
				2	
			3		
	5				1
6					5

Wenn man die beiden Raster übereinanderlegt, erhält man ein „Doppel-Sudoku“
(auch dieses Beispiel ist eindeutig lösbar):

Beim Doppel-Sudoku sollen wieder in den Zeilen und Spalten und gleichzeitig in den roten und blauen Unterrechtecken alle Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommen.

Man kann mit Hilfe des Programms auch solche Doppel-Sudokus frei gestalten, ausdrucken und bearbeiten.

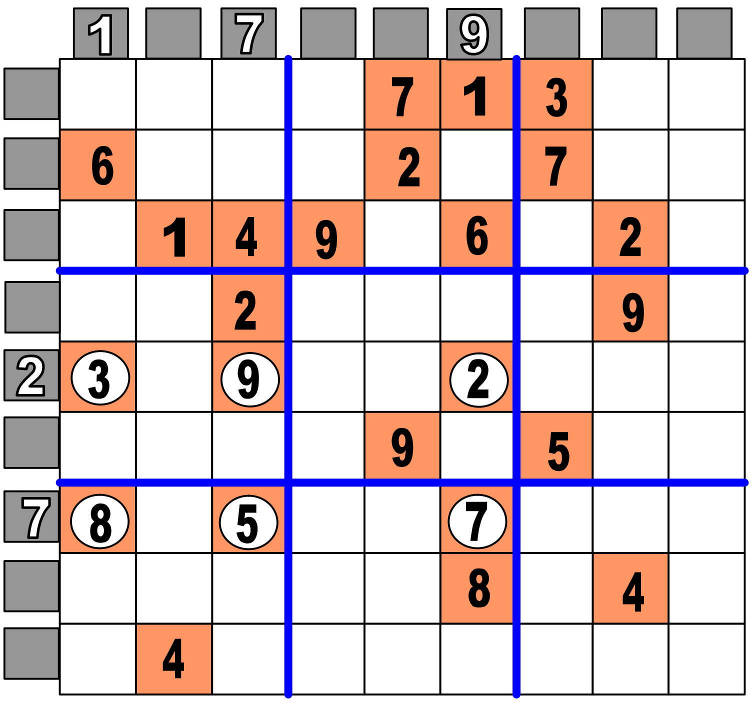
1.4 Zur „Geschichte“ des Computerprogramms

Das Computerprogramm wurde zur Förderung der Kreativität von mathematisch interessierten Schülern und Studenten entwickelt. Es bietet die Möglichkeit, „experimental-mathematisch“ und geleitet von den eigenen Interessen und Vorlieben, mathematische Strukturen bei Sudoku zu erforschen. Vorkenntnisse sind nicht erforderlich. Der gesunde Menschenverstand reicht zur Bearbeitung vieler mit dem Rätsel verbundener Fragen aus, allerdings gibt es daneben auch Probleme, die den Interessierten bis zu Fragen der Hochschulmathematik führen.
Das Programm kann in der Schule sehr gut zum individualisierten problemlösenden Unterricht eingesetzt werden. In den einzelnen Kapiteln werden Fragen zur selbständigen Bearbeitung gegeben. Dabei finden mathematisch Interessierte u. a. auch einige z. T. anspruchsvolle mathematische Fragen, die nach dem Wissen des Autors noch nicht bearbeitet wurden.

Der im Folgenden vorgestellte Rätseltyp reichert das Spiel um weitere mathematische Strukturen aus der Algebra, der Zahlentheorie und der Kombinatorik an.

1.5 Additionstafeln und Sudoku – ein neuer Rätseltyp

Das hier abgebildete Sudoku-Rätsel hat besondere mathematische Eigenschaften:



Die Zahlen in den sechs durch Kreise markierten roten Feldern ergeben sich dadurch, daß man die Zahlen in der zugehörigen Reihe und Spalte einfach addiert.

Falls das Ergebnis größer als 9 ist, wird 9 abgezogen. So ergibt sich z.B. die **8** durch **7+1=8** und die **5** durch **7+7 = 14** und **14-9=5**.

Man kann die Kopfzeile und –spalte so ergänzen, daß sich **alle Vorgaben und alle Zahlen der Lösung so ergeben**. Man sagt „das Feld ist eine Additionstafel (auch Gruppentafel) der Restklassengruppe zur Division durch 9“.

Wenn ein Sudoku gleichzeitig eine Additionstafel ist, hat man weitere und vor allem andere Möglichkeiten, durch kombinatorische Überlegungen zu einer Lösung zu kommen.

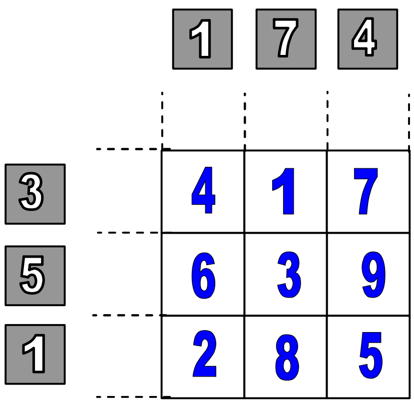
Dazu muß man natürlich erst einmal darüber nachdenken, wie man die Kopfzeile und –spalte möglichst geschickt benutzt.

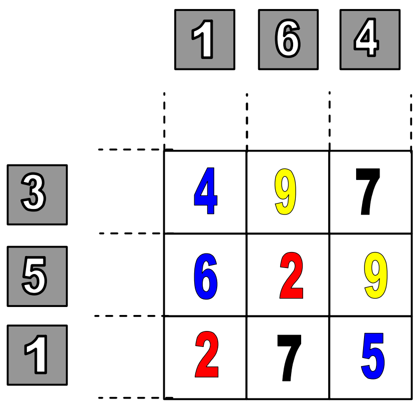
Weiterführende theoretische Fragen sind z.B.:

- ▶ Welchen Wert hat es zu wissen, ob ein Sudoku-Rätsel gleichzeitig eine Gruppentafel ist, auch wenn gar keine Zahl in der Kopfspalte oder Kopfzeile vorgegeben ist?
- ▶ Wie konstruiert man Sudoku-Rätsel, die gleichzeitig Gruppentafeln sind?
- ▶ Wie viele solcher Rätsel gibt es?
- ▶ Kann jedes Sudoku-Rätsel so dargestellt werden?

Um ein Summen-Sudoku selbst zu erfinden, muß man wissen, welche Möglichkeiten es für die Kopfzeile und –spalte überhaupt gibt:

- ▶ Welche Dreierkombinationen in der Kopfzeile und Kopfspalte können alle Zahlen von 1 bis 9 in den Feldern erzeugen (nur solche kommen überhaupt zur Erzeugung der 9 Unterquadrate in Betracht)? Ein vollständig ausgefülltes Sudoku-Quadrat muß aus 9 solchen Unterquadraten zusammengesetzt sein. Links ist eine Möglichkeit zu sehen. Die Folgen 1, 7, 4 und 3, 5, 1 können natürlich an verschiedenen Stellen in die Kopfzeile und Kopfspalte eingetragen werden. Rechts daneben ist ein nicht funktionierendes Beispiel, denn die hier gewählten Einträge für die Kopfzeile erzeugen kein erlaubtes Unterquadrat.





Der letzte Abschnitt des Kapitels „Sudoku und Mathematik“ beschäftigt sich mit diesem neuen Rätseltyp.

2. Sudoku und Mathematik

Je nach dem Schwierigkeitsgrad eines Rätsels muß man mehr oder minder tiefgehende Überlegungen anstellen, um zu einer Lösung zu finden (für die Rätsel in den großen Tageszeitungen reichen fast immer die einfachsten Varianten der grundlegenden Strategien). In Spezialheften (z. B. in den PM-Sonderheften) findet man jedoch anspruchsvollere Rätsel.

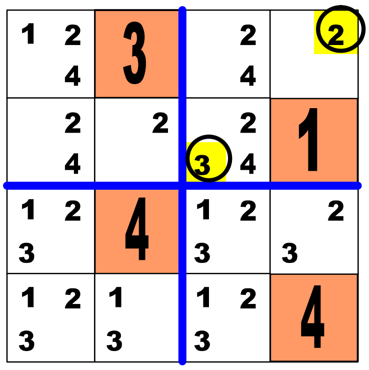
Ein besonderer Reiz beim Sudoku liegt wohl darin, daß man das Spiel durch die Kenntnis von Lösungsstrategien nicht „kaputt macht"; es wird eher interessanter. Je mehr Auswahl der Bearbeiter an Strategien hat, desto größer wird nämlich die Rolle der Kreativität und Intuition bei der passenden Auswahl eines Denkwerkzeugs.

Im folgenden Text wird – in Form von Aufgaben – an geeigneten Stellen auf gute Fragen zum selbständigen Weiterdenken hingewiesen. Für die Beschreibung von Situationsbeispielen werden in der Regel „Screenshots" des mitgelieferten Computerprogramms benutzt.

2.1 Lösungsstrategien

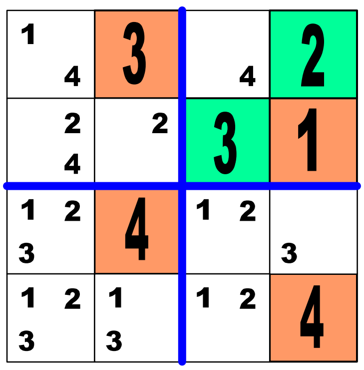
I) Grundlegende Strategien

Einsiedler, Zweisiedler und Zahlen mit nur einem Zuhause und Verallgemeinerungen



Wenn man in die freien Felder eines Sudoku-Rätsels die Zahlen schreibt, die vom ersten Ansehen her denkbar wären (da sie nicht mit der Vorlage kollidieren), kann es passieren, daß in einem Feld nur eine Zahl steht, sozusagen eine „**Einsiedlerzahl**". Dieser Fall ist trivial, man kann im Beispiel links die Zahl 2 dann gleich dort eintragen.

Die 3 muß in der zweiten Zeile stehen und sie kann nur in diesem Feld stehen, denn sie hat „**nur ein Zuhause**". Auch dieser Fall ist trivial.



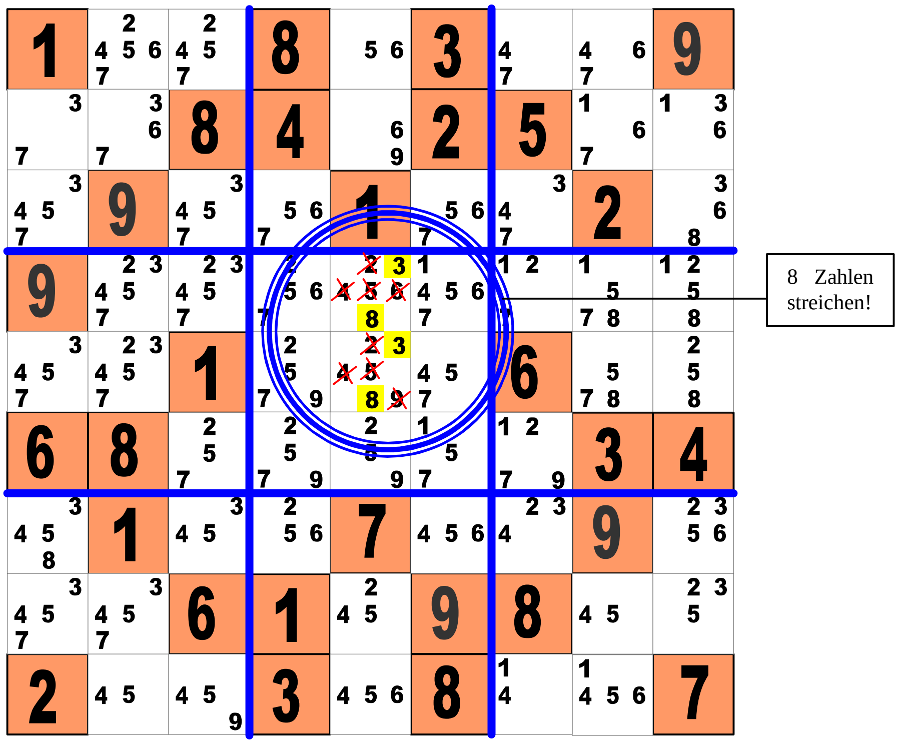
Für einfache Sudokus reicht es oft aus, mit diesen beiden Strategien zu arbeiten.

Hat man eine Zahl gesetzt, so hat man weitere Informationen und die „Lawine rollt".

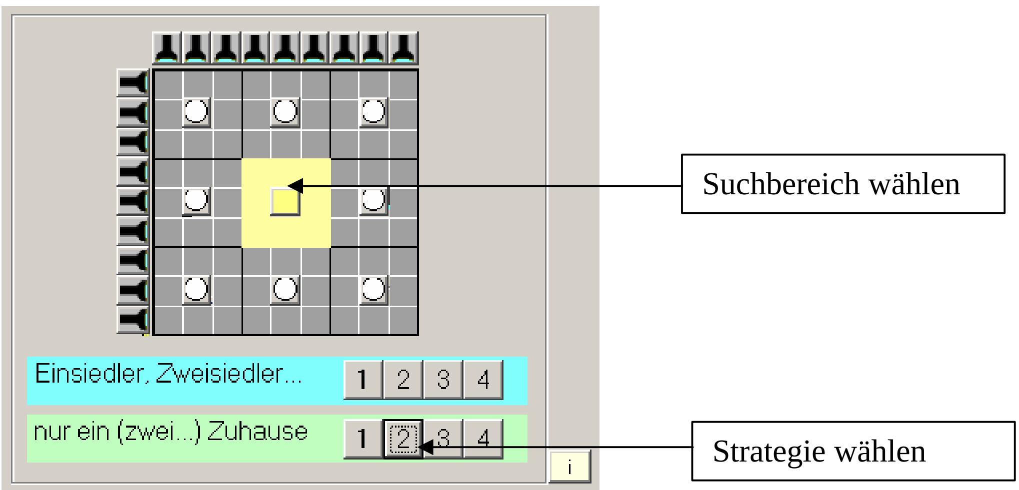
Das Bild zeigt die beiden eingetragenen Zahlen (durch einen Klick auf die rechte Maustaste) und die dann als Folge reduzierten Ratefelder (durch einen Klick auf „unnötige Ratefelder ausblenden").

Im Folgenden werden Verallgemeinerungen dieser beiden Strategien beschrieben. Bei dem 9x9-Sudoku ist vor allem die Frage interessant, **welche Sequenz der strategischen Operationen für ein spezielles Rätsel und im statistischen Mittel am schnellsten zur Lösung führt**. Man kann auch untersuchen, ob es überhaupt jemals nötig ist, eine Zahl versuchsweise in ein Feld zu schreiben, also letztlich mit „Backtracking" (gehe vorwärts, wenn möglich, gehe rückwärts wenn nötig) zu arbeiten (die beiden eben vorgestellten einfachen Strategien reichen noch nicht aus, um darauf sicher verzichten zu können).

Das Bild zeigt eine Start-Situation. Leider gibt es keine Einsiedlerzahlen. Nach Zahlen mit nur einem Zuhause wurde nicht gesucht (es gibt welche). Die im mittleren Quadrat entdeckten markierten Zahlen 3 und 8 haben gemeinsam nur zwei Felder, auf denen sie stehen können. Man kann daher alle anderen Zahlen für diese zwei Felder ausschließen.



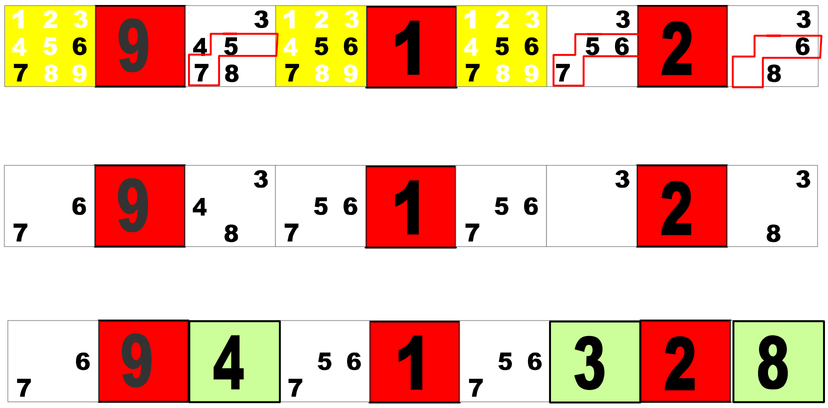
Das mittlere Quadrat des Spielfelds wurde mit der Strategie „**nur zwei Zuhause**“ durchgemustert. Diese Durchmusterung vorzunehmen ist die Entscheidung des Bearbeiters. Das Programm hat nur den langweiligen Teil der Arbeit erledigt.



Diese Strategie ist eine Verallgemeinerung der Strategie „suche Zahlen mit nur einem Zuhause“. Ebenso kann man die erste Strategie verallgemeinern.

Die Strategiegruppe Einsiedler, Zweisiedler… sucht in einem Teilfeld (also einer Spalte, Zeile oder einem Unterquadrat) **nach einer Teilmenge von k <u>Feldern</u>**, für deren Belegung insgesamt nur k Zahlen in Frage kommen (d. h. alle anderen Belegungen würden im Widerspruch zu schon eingetragenen Zahlen im Sudoku stehen).

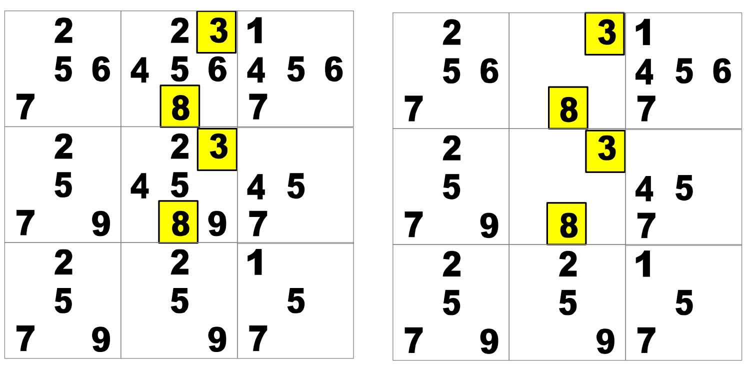
Da in alle Felder Einträge gemacht werden müssen, sind diese Zahlen dann an diese Felder gebunden und können an allen anderen Stellen im Teilfeld ausgeschlossen werden.



Das Beispiel zeigt einen „**Dreisiedler**“ auf den gelb markierten Feldern. Die Zahlen 5, 6 und 7 können für alle anderen Felder ausgeschlossen werden. In diesem Beispiel erzeugt dieser Streichvorgang einen Einsiedler (die 3). Diese Folge erzwingt dann letztlich die Belegung mit den grün hinterlegten Zahlen und man ist ein ganzes Stück weitergekommen.

Die Strategiegruppe „nur ein (zwei…) Zuhause“ sucht in einem Teilfeld **nach einer Teilmenge von k <u>Zahlen</u>**, für deren Ort insgesamt nur k Felder in Frage kommen (d.h. auf allen anderen Feldern im Teilfeld würde jede der Zahlen mit im Sudoku schon eingetragenen Zahlen im Widerspruch stehen (ganzes Feld: vorangegangene Seite).

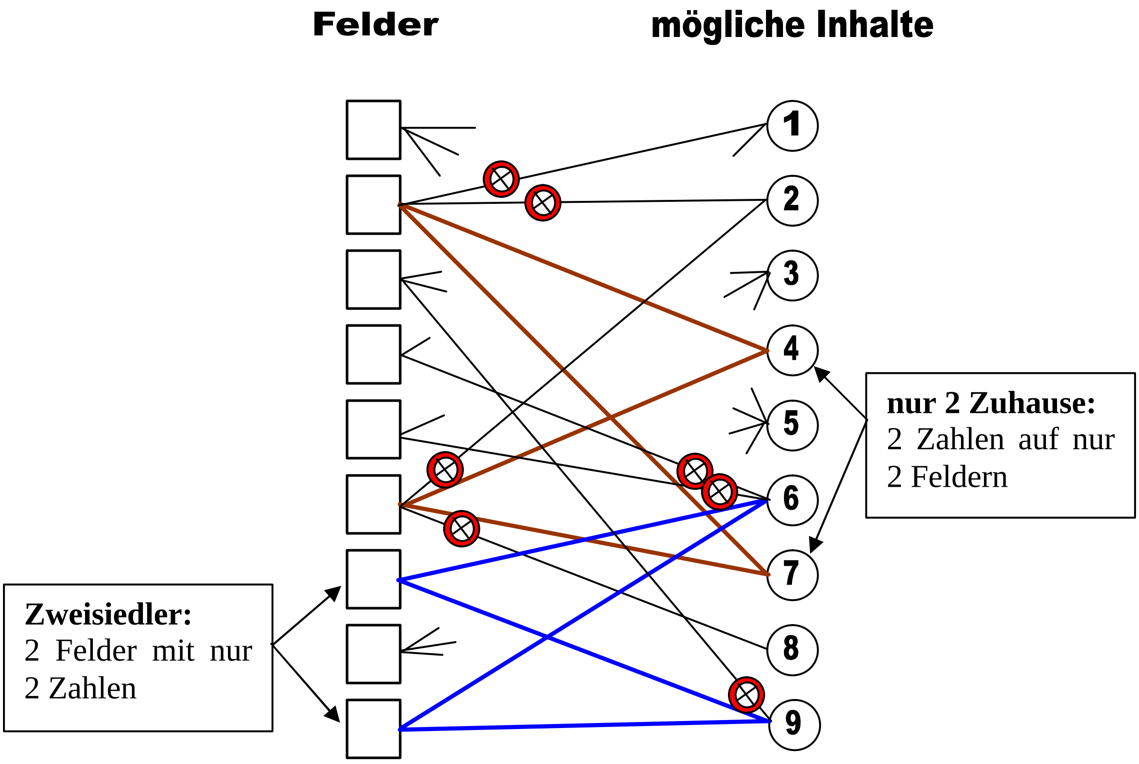
Da jede Zahl aber irgendwo stehen muß, müssen diese Felder dann mit diesen Zahlen belegt werden und alle anderen Belegungen können ausgeschlossen werden.



Das Beispiel zeigt zwei Zahlen mit nur 2 Zuhause. Alle anderen Zahlen auf diesen Feldern können also ausgeschlossen werden. Die Zahlen werden in diesem Beispiel zu Zweisiedlern in der mittleren Spalte (das bleibt in dem obigen Beispiel aber zunächst folgenlos).

Eine „Hintergrundbetrachtung“:

Die Strategiebeschreibungen weisen sprachliche Symmetrien auf. Eine graphische Darstellung der möglichen Zuordnungen für ein Unterquadrat bzw. eine Zeile oder Spalte zeigt an einem fiktiven Beispiel, daß die beiden Strategiegruppen zueinander „**dual**“ sind.



Beide Strategien suchen – graphentheoretisch betrachtet – also nach gleichen Mustern von Untergraphen. Die Auswertung eines Zweisiedlers erzeugt 2 Zahlen mit nur 2 Zuhause (indem die markierten Kanten gestrichen werden) und die Auswertung von nur 2 Zuhause erzeugt umgekehrt einen Zweisiedler. Die völlige Symmetrie der beiden Strategiegruppen wird auch durch die folgenden zwei Feststellungen deutlich:

1. Sudoku ist ein Spiel, bei dem man für 81 Felder notiert, welche Zahl man diesen jeweils zuordnet.
2. Sudoku ist ein Spiel, bei dem man für 81 Zahlen notiert, welches Feld man diesen jeweils zuordnet.

Diese Symmetrie erlaubt es, zu vielen Lösungsstrategien duale Partner zu bilden.

Man kann folgendes beweisen (z.B. mit Hilfe der Dualität):
Die Einsiedlerstrategie für k Felder (i. F. mit E(k) bezeichnet) ist mit der nur-n-Zuhause-Strategie (i. F. mit Z(n) bezeichnet) für n=9-k Zahlen gleichwertig. Symbolisch als Formel geschrieben gilt also: S(k) = Z(9-k).

▶ Aufgabe 1

Man begründe die Gleichwertigkeit von S(k) mit Z(9-k).

Man kann sich fragen, ob diese beiden dualen Strategiegruppen ausreichen, um jedes Sudoku-Rätsel – vielleicht hier und da etwas umständlich – ohne systematisches Probieren aufzulösen. Das ist leider nicht der Fall. Man kann das durch ein Gegenbeispiel belegen: Man sucht ein Sudoku-Rätsel, für das der Lösungsverlauf bei ausschließlicher Verwendung der beiden Strategiegruppen stagniert. D.h., daß weder E(k) noch Z(k) für beliebiges k auf beliebige Teilfelder angewandt einen Erkenntniszuwachs bringen.

▶ Aufgabe 2

Man konstruiere ein Sudoku-Rätsel in dessen Lösungsverlauf eine Situation eintritt, in der keine Verwendung der beiden Strategiegruppen mehr zu einem Erkenntniszuwachs führt.

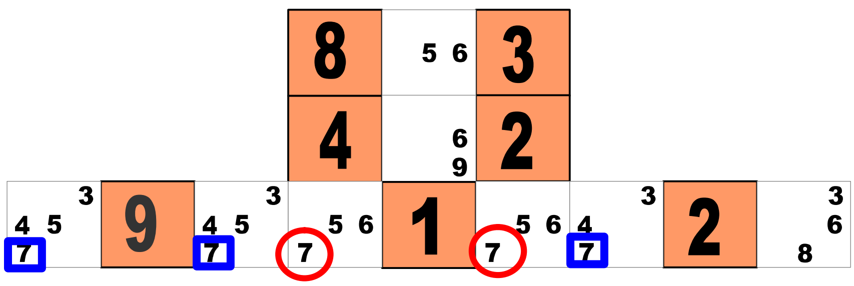
Es gibt weitere einfache (und auch komplizierte) Muster, die sich ausnutzen lassen, um für Felder Belegungen auszuschließen. Einige werden im Folgenden erläutert.

II) Weiterführende Strategien

Hüte, Pfeifen, Gitter, Trapeze und Querschläger

a) Hüte, Pfeifen und Ähnliches

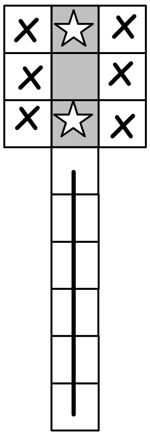
Das nachfolgend abgebildete Muster bezieht zwei Teilfelder ein (bei den bisherigen Strategien war es jeweils nur eines) und zeigt ein sehr effektives Ausschlußverfahren.



Im quadratischen Teilfeld stehen alle beiden 7en ausschließlich in demselben Dreierfeld. Daher muß in diesem Dreierfeld eine 7 stehen und somit können in dem Streifen keine weiteren 7en stehen. Man kann die rechteckig umrandeten also streichen.

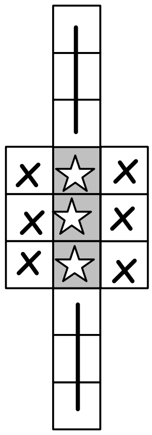
Derselbe Schluß ist ebenso für den umgekehrten Fall möglich, also bei Situationen in denen eine Zahl nur in einem Dreierfeld eines Streifens steht. Das wird im Bild bei der Kelle und dem Blockkreuz angedeutet. In der Pfeife wurde derselbe Schluß wie für den Hut markiert.

Kelle

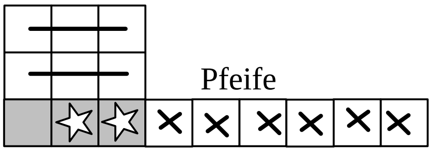


Die hier abgebildeten Muster und ihre gedrehten Exemplare sind dem obigen „Hutmuster“ natürlich gleichwertig.

Blockkreuz



Pfeife



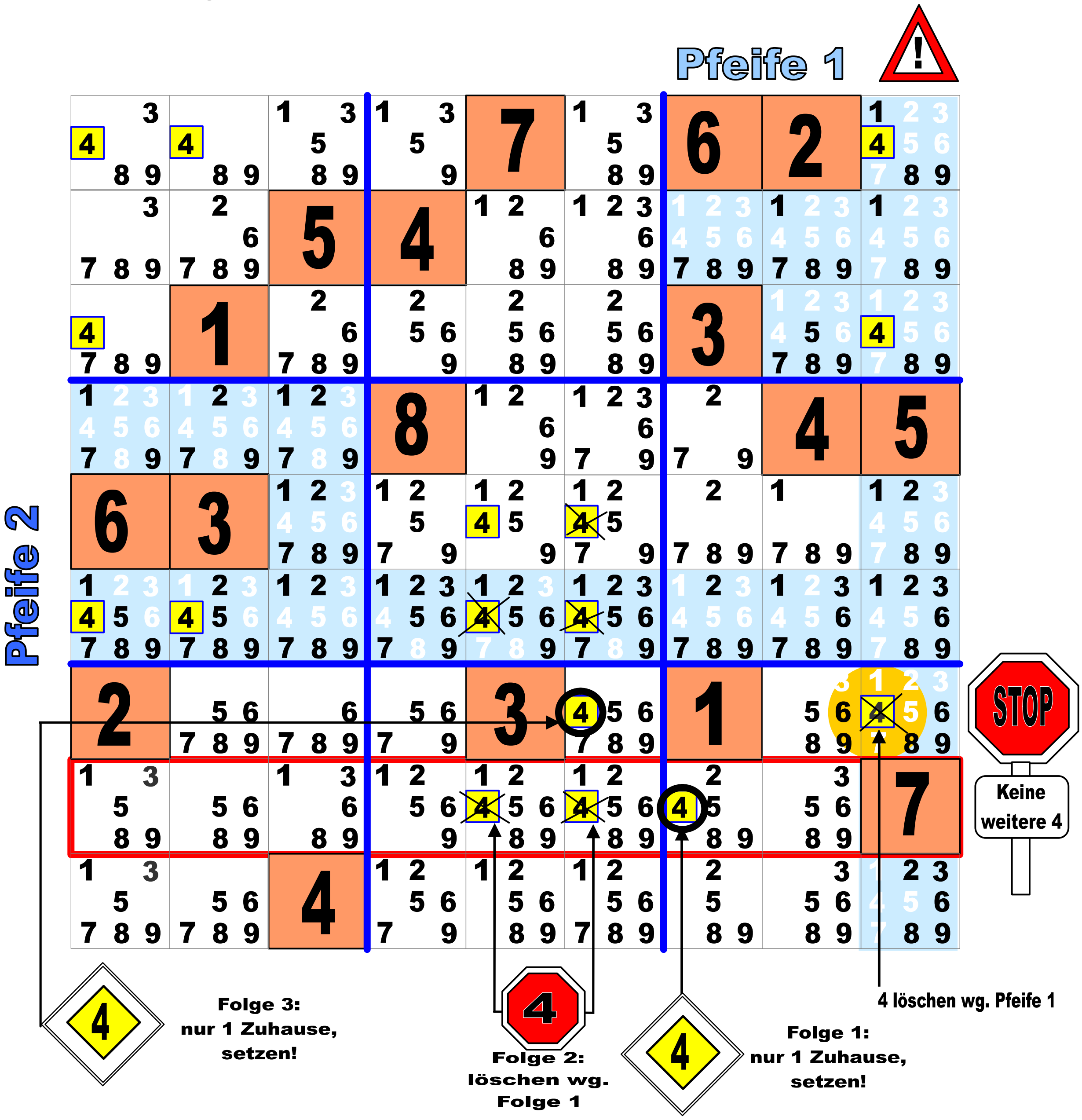
▶ Aufgabe 3

Für wie viele Zahlen (1, 2 oder 3) bringt diese Strategie neue Erkenntnisse? Wie sehen die Konstellationen mit 1, 2 oder 3 Zahlen jeweils aus?

Ein Beispiel:
Das abgebildete Rätsel stammt aus einem Rätselband und wurde dort als so extrem schwierig eingestuft, daß es ohne Zusatzinformationen fast nicht lösbar sei (die Zusatzinformationen werden hier nicht wiedergegeben). Versucht man nur mit den einfachen Strategien „Einsiedler“ und „nur ein Zuhause“ das Rätsel zu lösen, kommt man in der Tat nicht weit (oben rechts ist zwar eine 5 mit nur einem Zuhause, aber die Auswertungsfolge stagniert schnell). Man versuche es selbst einmal. Auf der folgenden Seite wird gezeigt, wie man mit dem „Pfeifenmuster“ jedoch sehr schnell einen Anfang findet, der dann auch geradlinig zur Lösung führt.

				7		6	2	
		5	4					
	1					3		
			8				4	5
6	3							
2				3		1		
								7
		4						

Zunächst wurden Ratefelder eingefügt und die 4en hervorgehoben. Der geübte Rätsellöser findet mit den Augen sofort Pfeife 1.



Man kann daraufhin die erste 4 ausschließen. Dadurch entsteht eine 4 mit nur einem Zuhause und man kann diese setzen und so an zwei Stellen eine 4 streichen. Damit hat die 4 zwischen der roten 3 und der roten 1 nur noch ein Zuhause, man kann sie setzen und die beiden darüber stehenden 4en streichen. Dann findet man Pfeife 2 und streicht die 4 über der 3 im mittleren Unterquadrat. Dadurch hat die 4 im mittleren Unterquadrat nur noch ein Zuhause und man kann sie setzen... Das Rätsel löst sich mit ähnlichen Schritten dann schnell auf.

Die große Zahl der möglichen Lagen für diese Muster macht diese Strategie so mächtig. Besonders günstig ist auch, daß man diese Muster mit den Augen sofort finden kann.

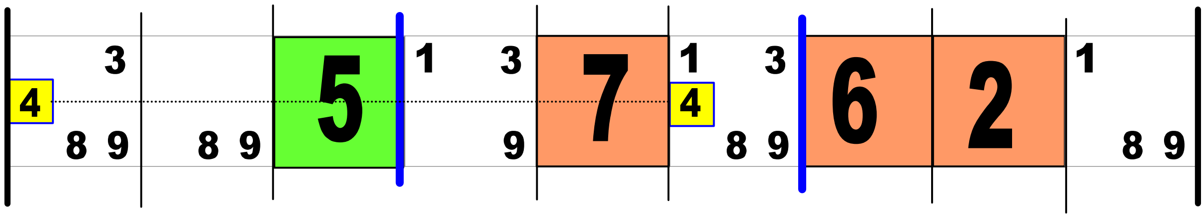
▶ Aufgabe 4

Wie viele Lagen für Hüte, Pfeifen etc. existieren in einem Sudokufeld?

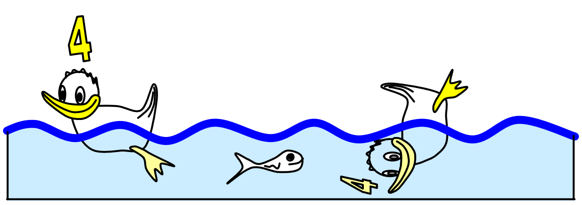
b) Gitter

Hier geht es um eine weitere einfache und nützliche Strategiegruppe, die ebenso wie „Einsiedler, Zweisiedler...“ und „nur ein, zwei... Zuhause“ Verallgemeinerungen derselben einfachen Grundidee erlaubt.

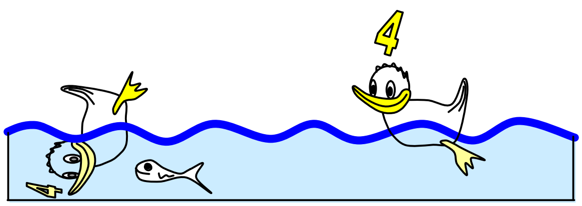
Wir nehmen an, daß während eines Bearbeitungsprozesses irgendwo eine Zeile (oder Spalte) der folgenden Art zu finden ist:



Die 4 hat innerhalb dieser Zeile nur 2 Plätze auf denen sie stehen kann (dafür kann es ganz unterschiedliche Gründe geben). Das ist eine „Entweder-Oder-Situation“, die hier mit der Abkürzung „**Wippe**“ bezeichnet wird. Auf genau einem der Plätze **muß** dann eine 4 stehen.

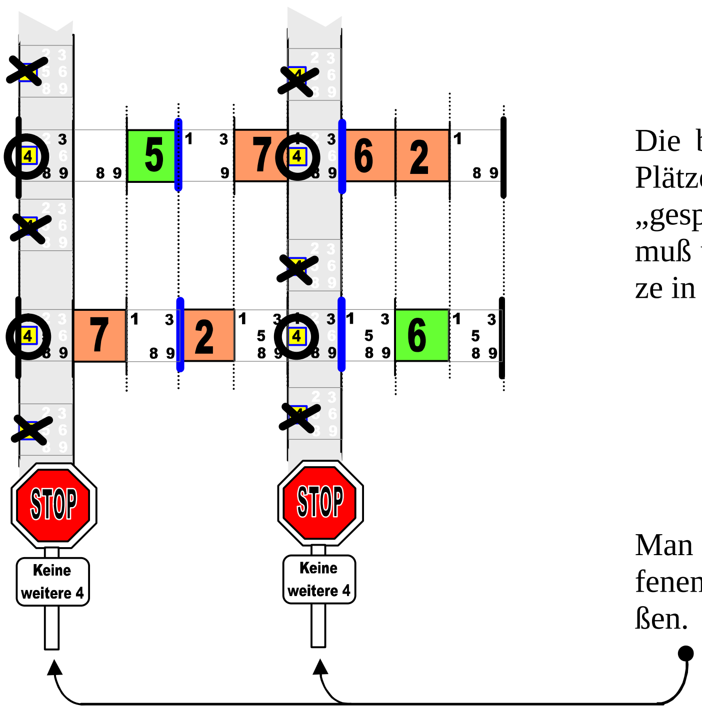


entweder so



oder so

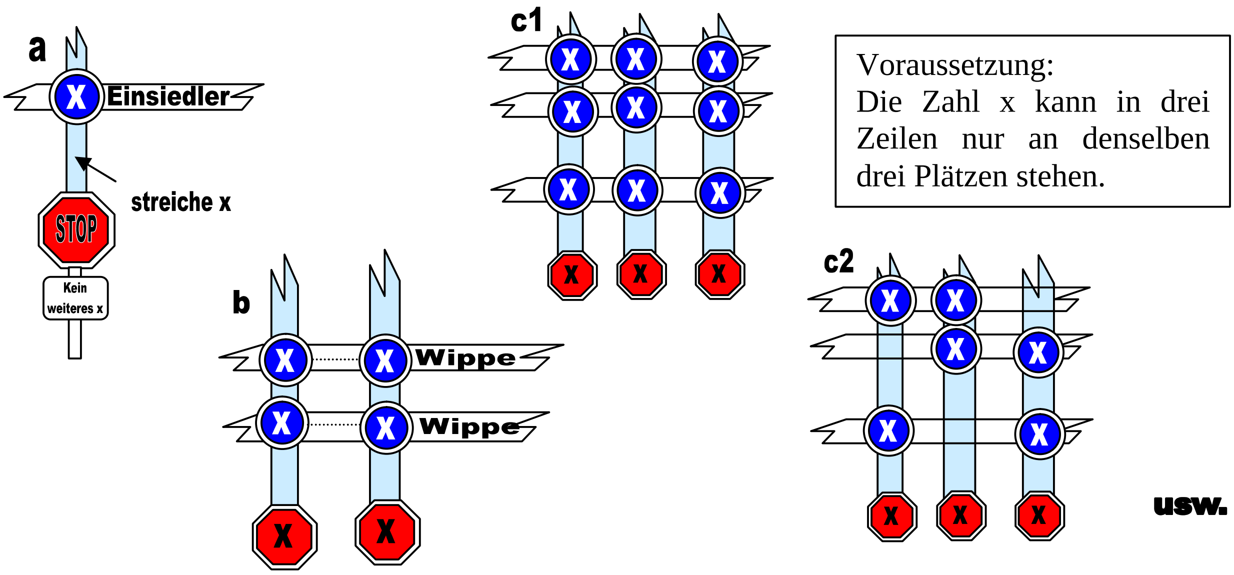
Diese Situation allein erlaubt noch keine weiteren Schlüsse. Das sieht aber sofort anders aus, wenn man noch irgendwo im Feld eine „parallele Wippe“ findet:



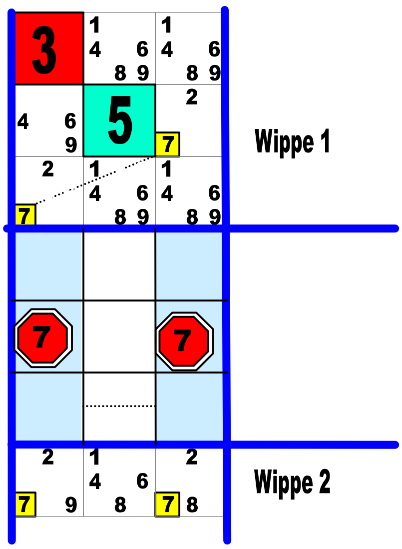
Die beteiligten Spalten sind durch die je 2 Plätze für die 4 in den gefundenen Zeilen „gesperrt“ (da in jeder Zeile ja eine 4 stehen muß und dafür nur die gefundenen zwei Plätze in Frage kommen).

Man kann also für alle Felder in den betroffenen Spalten die 4 als Belegung ausschließen.

Man kann auch diese Strategie verallgemeinern. Im fortgeschrittenen Stadium eines festsitzenden Lösungsprozesses kann mit Hilfe dieser Strategien oft schnell und elegant eine Lösung gefunden werden. Deshalb werden die Muster hier überblicksartig wiedergegeben. Die Bilder b und c erinnern an Gitter (die Rolle der Zeilen und Spalten kann vertauscht werden).



Der Einsiedler in a kann als „Keimzelle“ dieser Strategiegruppe angesehen werden. Kann die Zahl x in den skizzierten waagerechten Streifen nur an den markierten Stellen stehen, so kann in den betroffenen senkrechten Streifen ebenfalls kein weiteres x stehen.



Auf der Suche nach einem 2x2-Gitter ist man vielleicht auf die Struktur links gestoßen (und war zunächst vielleicht etwas enttäuscht über die Lage der 7-Felder im oberen Unterquadrat).

Es ist aber schnell klar, daß die „gemeinsame Mitgliedschaft“ in einem Unterquadrat völlig gleichwertig mit der gemeinsamen Mitgliedschaft in einem Streifen ist, auch die beiden 7en oben bilden eine Wippe. So kann auch hier wieder die 7 in den betroffenen Spalten ausgeschlossen werden.

Ebenso wie im „Streifenfall“ können auch hier verschiedene Typen gefunden werden.

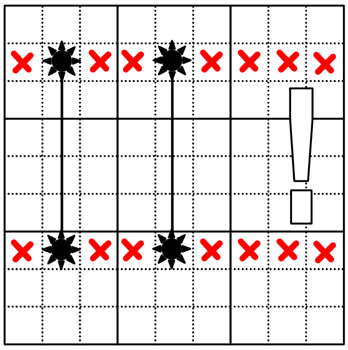
▶ Aufgabe 5

Man fertige für alle Gittertypen Prinzipbilder wie a, b und c an und konstruiere Situationen in denen diese Schlußmuster anwendbar sind.

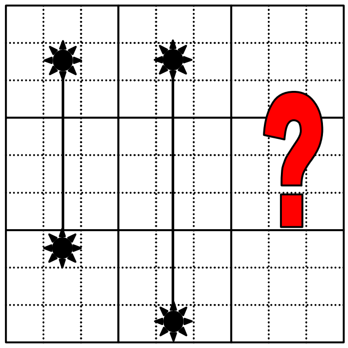
Man kann sich weitere Schlußmuster ausdenken. Diese sind um so „wertvoller“, je leichter sie „ins Auge springen“. Hier werden noch Konstellationen gezeigt, die in schwierigen Situationen den entscheidenden Anstoß zur Auflösung eines Rätsels liefern können.

c) Trapeze

Links ist ein Gitter aus zwei Wippen zu sehen (zur Abwechslung nun einmal mit senkrechten Wippen). Für alle angekreuzten Felder kann man die „Wippenzahl“ ausschließen.
Rechts paßt es leider nicht so schön zusammen, denn die Wippen sind nicht parallel, die Eckpunkte bilden ein rechtwinkliges Trapez. Wie kann man das auswerten?



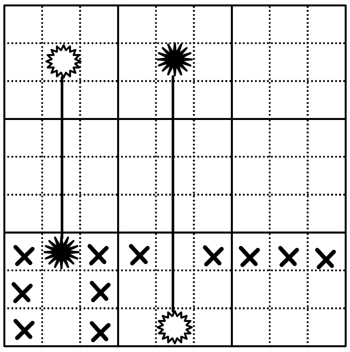
schon bekannt: Rechteck (Gitter)



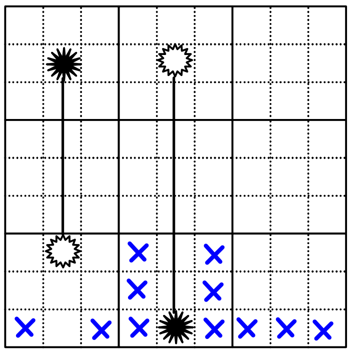
hier neu: Trapez

Ganz einfach: Da in der zweiten Zeile (von oben) **nur einer** der beiden markierten Plätze durch die Wippenzahl besetzt sein kann, **muß** also **mindestens einer** der beiden Plätze am anderen Ende der Wippen durch die Wippenzahl belegt sein. Man kann dann jeweils die markierten PLätze ausschließen.

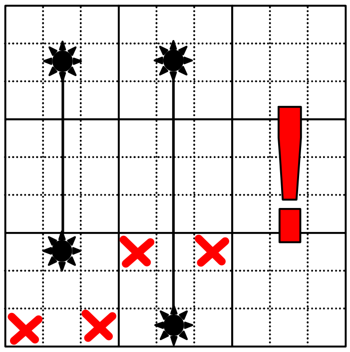
„genau einer“ Fall 1



„genau einer“ Fall 2



„Schnittmenge“

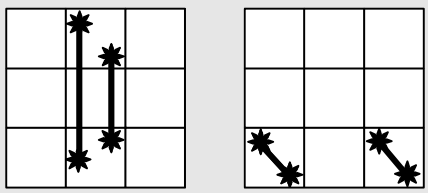


Es bedeutet: ✹ = die Wippenzahl ist gesetzt, ✺ = die Wippenzahl ist nicht gesetzt.

Auf den im Bild „Schnittmenge“ markierten Plätzen kann die Wippenzahl daher nicht stehen. Durch dieses Muster werden also vier Plätze ausgeschlossen. Man kann auch hier wieder eine Reihe von Fällen unterscheiden (z. B. durch Verschiebungen).

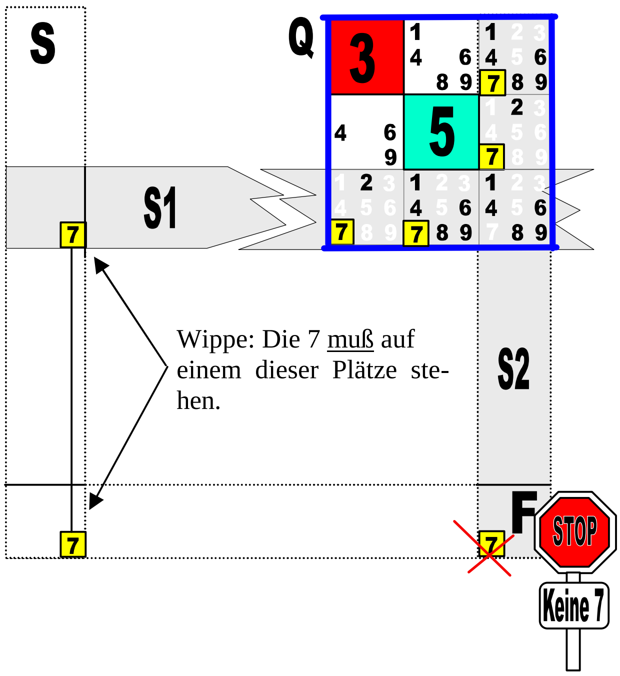
▶ Aufgabe 6

Welche der beiden Anordnungen läßt einen ähnlichen Schluß zu und was kann man noch schließen?



d) Querschläger

Bei der Durchforstung eines Unterquadrats nach Feldern in denen eine bestimmte Zahl stehen könnte, geschieht es gelegentlich, daß diese Felder **vollständig** von genau einer Zeile und genau einer Spalte liegen. Im Bild liegen in dem Quadrat Q alle Felder, in denen eine 7 stehen könnte, in der Zeile S1 und der Spalte S2. Nehmen wir weiterhin an, daß in S die 7en eine Wippe bilden. **Dann kann im Feld F keine 7 stehen**.



Der Grund ist sehr einfach:

Falls die 7 im Streifen S unten stünde, könnte im Feld F natürlich keine 7 mehr stehen, da sonst zwei 7en im unteren waagerechten Streifen vorkämen.

Falls die 7 im Streifen S oben stünde (und mehr Möglichkeiten gibt es ja nicht), könnte in S1 keine weitere 7 stehen (sie werden quasi rausgeschossen). Da nun aber in Q auch irgendwo eine 7 stehen muß, kämen nur noch Plätze im Streifen S2 in Frage (der „Schuß“ durch S1 erzeugt also einen „Querschläger“ in S2). Damit kann aber auch in diesem Fall im Feld F keine 7 mehr stehen.

Es ist auch hier wieder möglich, verschiedene geometrische Anordnungen zu unterscheiden, in denen diese Schlußweise funktioniert. Das sei auch hier dem Leser überlassen.

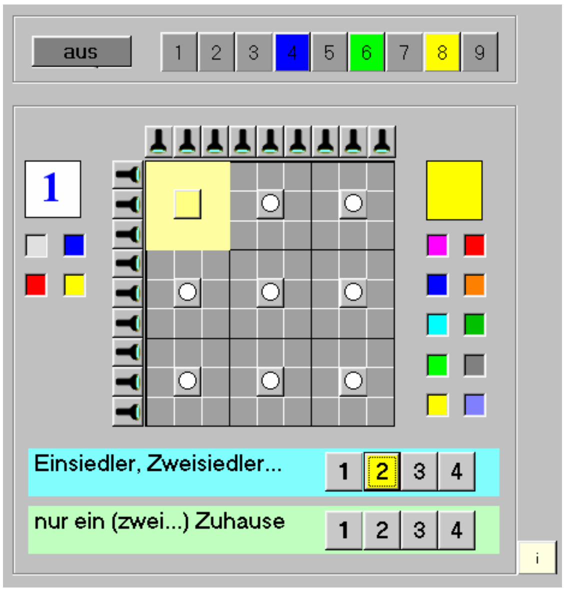
Man kann die beschriebenen Strategien einsetzen, um Sudokus zu lösen. Die lästige und ermüdende Sucharbeit nach diesen Strukturen kann man sich mit Hilfe des Programms erleichtern und sich auf das Denken konzentrieren (also auf die Wahl der Strategie und auf das Ziehen von Folgerungen).
Insbesondere kann man aber auch weitere logische Schlußmuster selbst erfinden. Hierzu ist das Computerprogramm zum Hervorheben frei wählbarer Zahlen in den kleinen Unterfeldern eine große Unterstützung.

III) Färbungsmethoden

Neben den angesprochenen Mustern sind evtl. auch Methoden systematischen Probierens interessant (vor allem dann, wenn man ein Rätsel findet, das den beschriebenen Strategien eben doch widersteht). Man kann Probierverfahren oft (oder immer?) als spezielle Organisationsformen des Backtracking ansehen.

> Ein Beispiel:
> Beim sogenannten „coloring“ (den Begriff benutzen englische Sudoku-Fans) wird die Folge des möglichen Setzens – beispielsweise einer 5 – auf die weiteren 5en im Sudoku durch Farben markiert (die in der Folge verbotenen 5en etwa blau, die in der Folge sicheren 5en in gelb). So kann man Konsequenzen einer Auswahl bequem verfolgen und bei eventuell auftretenden Widersprüchen auf die Fehlerhaftigkeit der Annahme zurückschließen. Es ist aber noch mehr möglich: Gibt es für eine 5 in einem Unterfeld beispielsweise nur 2 mögliche Stellen und führt die versuchsweise Entscheidung für jede der beiden Stellen irgendwann im weiteren Verlauf zu einer 5 auf demselben Feld an anderer Stelle so steht dort sicher eine 5.

Aber dieses ist natürlich **nichts anderes als gezieltes Backtracking** und es ist der Erfindungsgabe jedes Rätsellösers anheimgestellt, seine eigenen übersichtlichen Variationen und Organisationsformen dieser algorithmischen Grundmethode zu entwickeln.



Zur Unterstützung werden verschiedene Farben zur Markierung der Ratefelder angeboten.
In der Palette rechts wählt man die Hintergrundfarbe der ausgewählten Felder (etwa alle Zweisiedler im Unterquadrat oben links oder alle 4en im gesamten Feld).

In der Palette links wählt man die Farbe, die eine mit der linken Maustaste angeklickte Auswahlzahl annimmt.

Ein Klick auf die kleinen um das Feld gruppierten Lampen (und auch auf die im Feld), ruft auch die gerade aktive „Einsiedler- und Zuhausestrategie“ auf.

Zum Schluß soll noch einmal an eine schwierige weitergehende mathematische Fragen (die nach dem Wissen des Autors noch ungelöst ist) erinnert werden:

> ▶ **Ein ungelöstes mathematisches Problem:**
>
> Welches Set strategischer Operationen (die hier vorgestellten reichen nicht immer aus) ist in dem Sinne vollständig, daß man jedes Sudoku allein mit diesen Werkzeugen lösen kann und welche Sequenz der strategischen Operationen führt für ein spezielles Rätsel und im statistischen Mittel am schnellsten zur Lösung?

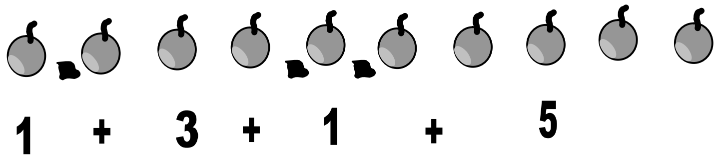
2.2 Kombinieren und Zählen – mathematische Vergnügungen

Dieser Abschnitt ist einer Lieblingsbeschäftigung vieler Mathematiker gewidmet: dem Zählen. Diese Tätigkeit können zwar schon kleine Kinder ausführen, es ist aber immer wieder überraschend, daß man dabei auf Fragen stoßen kann, die bis heute unbeantwortet sind. Ein Beispiel: Man kann die Zahl 10 auf viele verschiedene Weisen in Summanden zerlegen, etwa

1 + 9 = 10
2 + 3 + 5 = 10
1 + 1 + 1 + 1 + 1 +1 + 3 + 1 = 10.

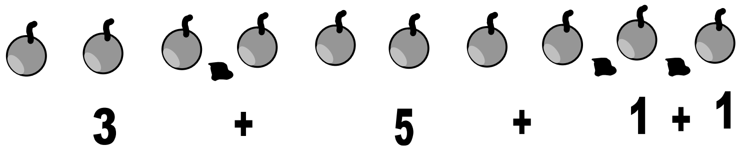
Auf wie viele verschiedene Arten geht das? Wenn man die Zerlegungen 1 + 3 + 7 und 3 + 1 + 7 und alle anderen Reihenfolgen <u>als verschieden betrachtet</u> ist das einfach:

Man denke sich 10 Äpfel in eine Reihe gelegt. Man hat dann 9 Zwischenräume. Nun stelle man sich vor, man habe 9 Steinchen. Für jeden Zwischenraum soll man entscheiden, ob man ein Steinchen hineinlegt, oder nicht. Dafür gibt es offenbar $\mathbf{2^9 = 512}$ verschiedene Möglichkeiten. Eine ist hier abgebildet:



Durch diese „Interpunktion“ mit Steinen wird also eindeutig eine Zerlegung der Zahl 10 in Summanden festgelegt.

Allerdings führt eine andere „Interpunktion“ auf eine Zerlegung, die sich nur in der Reihenfolge der Summanden von dieser unterscheidet:



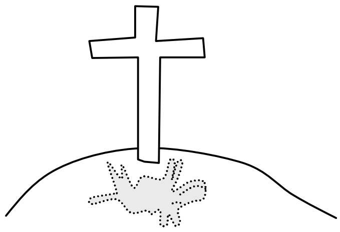
Die Zahl 512 ist also wohl etwas zu hoch angesetzt, wenn man Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge ihrer Summanden unterscheiden, nicht doppelt zählen will. In der Mathematik hat sich dafür der Begriff der Äquivalenzrelation eingebürgert. Eine Äquivalenzrelation identifiziert also auf den ersten Blick verschiedene Objekte und steckt sie in eine sogenannte **„Äquivalenzklasse“**.

Die Zerlegungen

1+2+7　　1+7+2　　2+1+7　　2+7+1　　7+1+2　　7+2+1

bilden eine Äquivalenzklasse. Wenn man darnach fragt, wie viele Zerlegungen der 10 in Summanden es dann gibt, wenn zwei Zerlegungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, identifiziert, fragt man also nach der Anzahl der Äquivalenzklassen. Man könnte nun auf die Idee kommen, daß man dazu ja einfach nur die zu hoch angesetzte 512 durch 6 zu teilen braucht. Abgesehen davon, daß diese Rechnung gar nicht aufgeht, und man daran schon die Fehlerhaftigkeit der Überlegung erkennt, kann man das aber auch so sehen:

Die Zerlegungen 1+9 und 9+1 bilden eine Äquivalenzklasse mit nur 2 statt 6 Elementen. Und „hier liegt der Hund begraben“: Immer dann, wenn die Äquivalenzklassen unterschiedlich groß sind, kann man ein schwieriges und somit interessantes Problem an der Angel haben. Das oben beschriebene Zählproblem ist das sogenannte „Partitionsproblem“. Es ist bis heute ungelöst. Es gibt nur rekursive Berechnungsmethoden für die Anzahl der Zerlegungen.



Im Folgenden werden einige Zählprobleme im Zusammenhang mit Sudoku angesprochen. Zu einigen wird eine Lösung angegeben. Zu manchen werden nur Bearbeitungsvorschläge gemacht und einige der genannten Fragen bleiben unbeantwortet und es werden natürlich auch nicht alle Fragen genannt. Nach den Recherchen des Autors sind viele Fragen noch nicht mathematisch bearbeitet worden. Man kann hier also mathematisch forschen!

Erläuterungen, Anregungen und Aufgaben

Zunächst werden Bezeichnungen festgelegt.

1. Unter einem **Sudoku-Quadrat** (kurz **SQ** im Singular und Plural) soll hier ein ganz ausgefülltes 9x9-Quadrat verstanden werden, das den **Sudoku-Bedingungen** (kurz **SB**) genügt: In jeder Zeile und jeder Spalte und jedem 3x3-Unterquadrat kommen alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal vor (für Mini-Sudoku gilt Analoges).
2. Ein Sudoku-Quadrat wird zu einem **Sudoku-Rätsel**, (kurz **SR**) indem man die Zahlen in einigen Feldern nicht zeigt (d.h. die Felder frei läßt). Die Aufgabe besteht dann darin, die fehlenden Zahlen zu ergänzen. Für diese Ergänzung darf es nur eine Möglichkeit geben. (Eine schwierige Frage ist es, welche und wie viele Zahlen man weglassen darf.)

▶ Aufgabe 1
Man erfinde Mini-SR mit unterschiedlichen Anzahlen von Vorgaben. Welche Möglichkeiten gibt es überhaupt?

Hinter jedem SR steht ein SQ. Man kann sich daher erst einmal für SQ interessieren. Wir betrachten 4 verschiedene Mini-SQ (zwei SQ nennen wir „verschieden“ falls es Stellen gibt, an denen unterschiedliche Zahlen stehen).

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

I

4	2	3	1
1	3	4	2
2	4	1	3
3	1	2	4

II

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

III

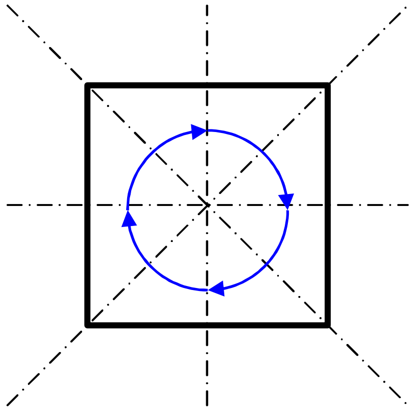
2	3	4	1
4	1	2	3
3	4	1	2
1	2	3	4

IV

▶ Aufgabe 2
Wie viele unterschiedliche Mini-SQ gibt es?

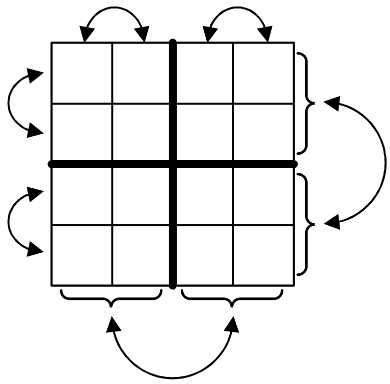
Inwiefern sind die vier Beispiele aber „wirklich verschieden“? Dazu kann man einige Fälle untersuchen.

<u>Kogruenzabbildungen (i.F.: KA)</u>



Bei genauem Hinsehen zeigt sich, daß SQI und SQII auf einfache Art zusammenhängen: SQII entsteht dadurch, daß man SQI um 90° nach rechts dreht. Entsprechend kann man weitere SQ erzeugen, indem man um 180° oder 270° dreht, oder an den Mittellinien oder Diagonalen spiegelt. Man nennt diese Operationen „Kongruenzabbildungen“, da sie das Quadrat wieder mit sich selbst zur Deckung bringen. Zählt man die „Nullabbildung“, die das Quadrat einfach liegen läßt, dazu, so gibt es also 8 Abbildungen. Es kann daher vorkommen, daß 8 „verschiedene SQ“ in diesem Sinne gleichwertig sind. Man sagt sie sind „**äquivalent unter den Kongruenzabbildungen**“. In diesem Sinne gibt es also weniger als 288 „wirklich verschiedene“ Mini-SQ.

<u>Zeilen- und Spaltentauschen (i.F.: ZT)</u>



Auch SQIII ist nicht wirklich neu: Es entsteht dadurch, daß man die beiden letzten Spalten von SQI miteinander vertauscht. Man hätte aber auch die beiden ersten Spalten oder Zeilen miteinander vertauschen können, oder die obere Zeilen-Zweiergruppe mit der unteren oder die linke Spalten-Zweiergruppe mit der rechten, oder sogar Kombinationen dieser Operationen.
Man kann also „ziemlich viele“ der 288 verschiedenen SQ in **Äquivalenzklassen** von SQ zusammenfassen.

<u>Permutation (i.F.: P)</u>

Schließlich kann man auch noch entdecken, daß SQIV dadurch entsteht, daß man in SQI einen „Ringtausch“ vornimmt: Die 1 wird durch eine 2 ersetzt, diese durch eine 3 usw. Man hat viele Möglichkeiten, solche Permutationen festzulegen. Auch diese Operationen führen zu einer Verkleinerung der Anzahl aller möglichen „wirklich verschiedenen“ SQ.

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{matrix}$$

Alle SQ, die sich auf eine der beschriebenen Weisen durch gewisse Operationen zusammenfassen lassen, bilden eine **Äquivalenzklasse von SQ** (natürlich muß man immer dazusagen, welche Operationen man meint). **Die Anzahl der Äquivalenzklassen** von SQ hinsichtlich einer angegebenen Operatorenmenge kann man dann als die **Anzahl der wirklich verschiedenen SQ** bezeichnen.

▶ Aufgabe 3 (für alle vorgestellten Sudoku-Varianten)

a) Wir legen **KA** zugrunde. Wie groß sind die Äquivalenzklassen (es kann evtl. verschieden große geben!) und wie viele gibt es jeweils?

b) Wie a), aber mit **P** und **ZT**

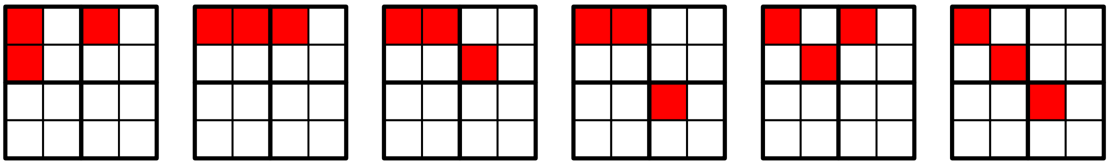
c) Nun sollen nur die SQ als wirklich verschieden angesehen werden, die weder durch KA, noch durch ZT oder P zusammenhängen. Wie viele in diesem Sinne verschiedene gibt es? Wie groß sind diese Äquivalenzklassen?

Bearbeitungshinweise (zunächst für Mini-Sudoku)

zu Aufgabe 1
Hier kann vor allem zunächst experimentell (dabei hilft das Programm) gefunden werden, daß die kleinste Vorgabe für ein eindeutig lösbares SR aus 4 Zahlen besteht. Es gibt aber auch Vorgaben aus bis zu 12 (!) Zahlen, die nicht eindeutig lösbar sind. Nach diesem experimentellen „Einfühlen" kann man dann auf verschiedene Weise beweiskräftig argumentieren. Dazu folgen einige Anregungen.

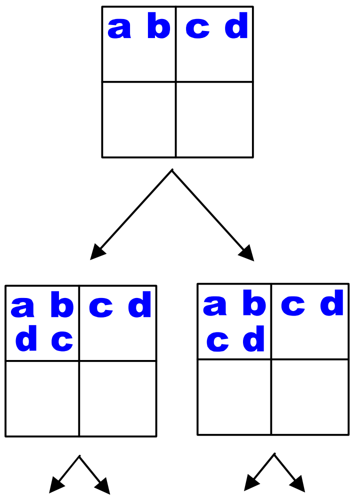
Daß es kein eindeutig lösbares Mini-SR mit irgendeiner Anzahl von Vorgaben, die nur zwei verschiedene Zahlen enthalten, geben kann, sieht man so: Gäbe es eine solche Vorgabe und ein eindeutig zugeordnetes SQ, so könnte man die beiden nicht in der Vorgabe enthaltenen Zahlen im ausgefüllten SQ vertauschen und so eine zweite Lösung erhalten. Hieraus erkennt man unter Anderem, daß man wenigstens 3 Zahlen vorgeben muß.

Nun nehme man an, daß es ein Mini-SR mit 3 Vorgaben gäbe. Das Unterquadrat mit der größten Anzahl von Einträgen kann man durch ZT-Operationen auf jeden Fall nach oben links bewegen und auch dafür sorgen, daß das Feld ganz oben links sicher besetzt ist. Ferner nehmen wir an, daß in diesem Unterquadrat genau 2 Vorgaben liegen. Das Mini-SR ließe sich dann in eines der abgebildeten Muster transformieren (durch Drehungen, Spiegelungen und Zeilentausch- bzw. Spaltentauschoperationen).



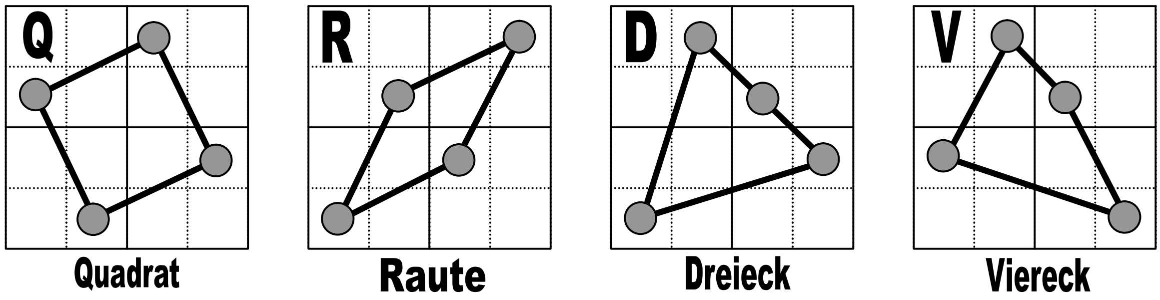
Für diese wenigen Muster kann man dann leicht zeigen, daß es bei drei verschiedenen Zahlen in den roten Feldern jeweils mehrere Lösungen gäbe.
Ebenso kann man die anderen Fälle (3 Vorgaben im Unterquadrat oben links und nur eine Vorgabe pro Unterquadrat) durch Äquivalenzklassenbildung abhandeln.

zu Aufgabe 2
Für das Mini-Sudoku kann man sich einen vollständigen Überblick über alle möglichen SQ verschaffen. Dazu bezeichnet man die erste Zeile einfach mit a, b, c, d und läßt offen, für welche Ziffer von 1 bis 4 der jeweilige Buchstabe steht. Dann zeichnet man sich einen „Verzweigungsbaum", der alle Möglichkeiten der weiteren Belegung aufzeigt. Für 9x9-Quadrate wird dieses Verfahren allerdings zu aufwendig. Man muß dort anders überlegen. Beim Mini-Sudoku findet man so schließlich 12 Lösungen. Diese sind noch mit 24 zu multiplizieren, da es 24 Möglichkeiten für die Zuordnung der Buchstaben a, b, c, d zu den Ziffern von 1 bis 4 gibt.
Man kann natürlich auch das Programm ohne Vorgabe laufen lassen und die Lösungen zählen lassen. Auch so erhält man 288, allerdings ohne dadurch weitere Struktureinsichten zu gewinnen.



zu Aufgabe 3
Nach den Bemerkungen zu Aufgabe 2 kann man sich einen vollständigen Überblick über die Mini-SQ verschaffen. Dieser ist auf der folgenden Seite wiedergegeben.

Die jeweils vier gleichen Einträge sind stets in einem der vier abgebildeten Muster angeordnet. Unter jedem Quadrat ist angegeben, welche Muster jeweils vorkommen (evtl. in gedrehter oder gespiegelter Ausrichtung).



Zwei der abgebildeten Quadrate unterscheiden sich jeweils nur dadurch, daß die 3. und 4. Zeile vertauscht ist. Diese sind in Zweiergruppen zusammengefaßt.

I

a	b	c	d
c	d	a	b
b	a	d	c
d	c	b	a

2Q + 2R

a	b	c	d
c	d	a	b
d	c	b	a
b	a	d	c

4V

II

a	b	c	d
c	d	a	b
b	c	d	a
d	a	b	c

Q + R + 2V

a	b	c	d
c	d	a	b
d	a	b	c
b	c	d	a

Q + R + 2V

III

a	b	c	d
c	d	b	a
b	a	d	c
d	c	a	b

Q + R + 2V

a	b	c	d
c	d	b	a
d	c	a	b
b	a	d	c

2D + 2V

IV

a	b	c	d
d	c	a	b
b	a	d	c
c	d	b	a

Q + R + 2V

a	b	c	d
d	c	a	b
c	d	b	a
b	a	d	c

2D + 2V

V

a	b	c	d
d	c	b	a
b	a	d	c
c	d	a	b

4V

a	b	c	d
d	c	b	a
c	d	a	b
b	a	d	c

4D

VI

a	b	c	d
d	c	b	a
b	d	a	c
c	a	d	b

2D + 2V

a	b	c	d
d	c	b	a
c	a	d	b
b	d	a	c

2D + 2V

Identifikation gedrehter oder gespiegelter SQ

Jedes der 12 SQ aus Buchstaben repräsentiert 4! = 24 verschiedene SQ aus Zahlen. Die **Äquivalenzklassen unter den Kongruenzabbildungen** enthalten für alle SQ bis auf das links oben abgebildete jeweils 8 Elemente.

Da das links oben abgebildete (als einziges!) eine 180° Drehsymmetrie aufweist, zerfallen die 24 von diesem Quadrat repräsentierten SQ in 6 Äquivalenzklassen mit jeweils 4 Elementen. Die übrigen 264 SQ zerfallen in 33 Äquivalenzklassen mit jeweils 8 Elementen. Folglich gibt es 39 verschiedene SQ, falls man diejenigen miteinander identifiziert, die sich durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen.

Identifikation permutierter oder zeilenvertauschter SQ

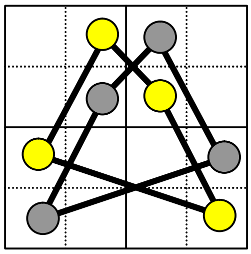
Die Zusammenstellung auf der vorangegangenen Seite zeigt, daß es nur 12 verschiedene **Äquivalenzklassen** gibt, falls man durch Permutation ineinander überführbare SQ zusammenfaßt. Diese Anzahl reduziert sich auf höchstens 6, wenn man zu den **Permutationen** auch noch **Zeilentauschoperationen** hinzunimmt. Diese wurden mit I bis VI durchnumeriert (von diesen fallen aber je 2 zusammen, siehe weiter unten).

Die Anzahl „wirklich verschiedener“ SQ

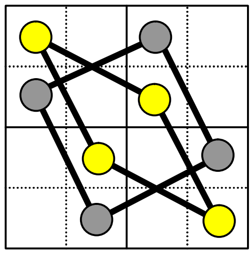
Nun wird die Anzahl der SQ bestimmt, falls man alle diejenigen nur einmal zählt (also in **eine Äquivalenzklasse** zusammenfaßt), die man durch **irgendeine Kombination von Zeilentauschoperationen, Kongruenzabbildungen und Permutationen** ineinander überführen kann.

Dazu muß man sich überlegen, ob man durch Drehungen oder Spiegelungen von einer der sechs Äquivalenzklassen I bis VI in eine andere gelangen kann.

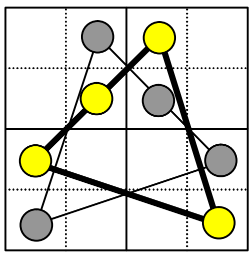
Da sich durch die Kongruenzabbildungen der „Typ“ des SQ nicht ändert, kann Klasse I nur mit Klasse V zusammenfallen, denn nur in diesen beiden Klassen gibt es den Typ 4V.



Um mit vier Vierecken alle 16 Felder eines 4x4-Rasters zu überdecken, gibt es aber nur eine einzige Möglichkeit. Diese ist rechts abgebildet (die zwei fehlenden Vierecke liegen symmetrisch gespiegelt zu den eingetragenen).
Also fallen die 96 SQ aus Klasse I und V zusammen, wenn man die Kongruenzabbildungen zur Äquivalenzklassenbildung hinzunimmt.



Nun wird gezeigt, daß die übrigen 4 Klassen zu einer einzigen Klasse zusammenfallen. Dazu überlegt man sich analog, daß es nur ein einziges Muster vom Typ Q + R + 2V gibt. Die Skizze rechts ist beweiskräftig (für Quadrat und Raute gibt es nur die skizzierte Lage und die Vierecke ergeben sich dann ebenfalls zwangsläufig). Damit fallen die Klassen II, III und IV zusammen.

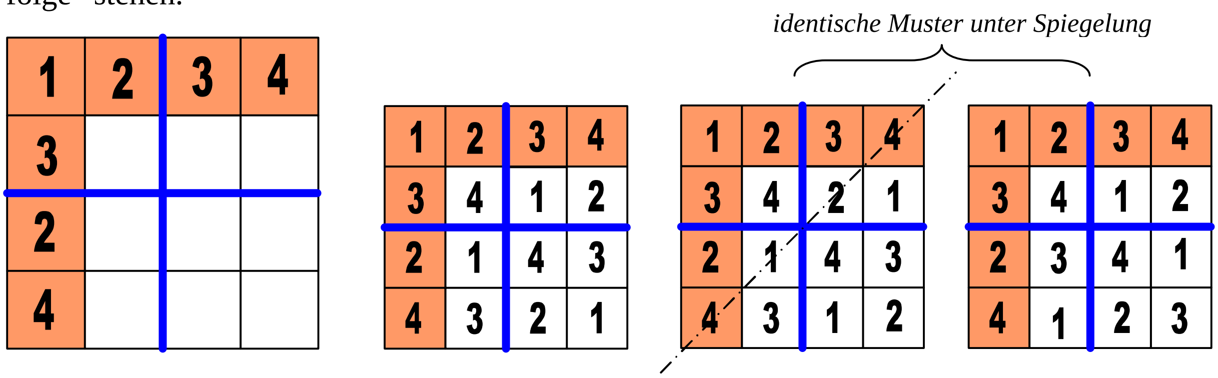


Übrig bleibt Klasse VI. Alle SQ aus dieser Klasse sind vom Typ 2D + 2V. Dieser Typ kommt auch in den Klassen III und IV von. Die Skizze rechts zeigt, daß es auch für diesen Typ nur ein einziges Muster gibt (falls die beiden Dreiecke nicht um 90° sondern um 180° verdreht liegen, kann man keine 2 Vierecke mehr unterbringen sondern nur noch weitere 2 Dreiecke).
Daher fallt auch Klasse VI mit Klasse III zusammen.

Zusammenfassung:
Es gibt nur 2 wirklich verschiedene 4x4-SQ, falls man Äquivalenzklassen nach KA, P und ZT bildet. Die erste Klasse beinhaltet 96 SQ, die zweite beinhaltet 192 SQ. (Weiter unten wird gezeigt, daß man die eine Klasse als Gruppentafel zur Restklassegruppe modulo 4 und die andere als Gruppentafel zur Kleinschen Vierergruppe auffassen kann).

Eine schnellere Zählmethode

Eine andere Möglichkeit, schneller zu den genannten Ergebnissen zu gelangen, besteht darin, von vornherein größere Äquivalenzklassen zu bilden. Durch Permutation kann dafür gesorgt werden, daß im Unterquadrat links oben die Zahlen von 1 bis 3 genau an den im Bild gewählten Plätzen stehen und durch Zeilen- bzw. Spaltentauschen kann man erreichen, daß die 3 und die 4 in der ersten Zeile und die 2 und die 4 in der ersten Spalte in ihrer „natürlichen Reihenfolge“ stehen.



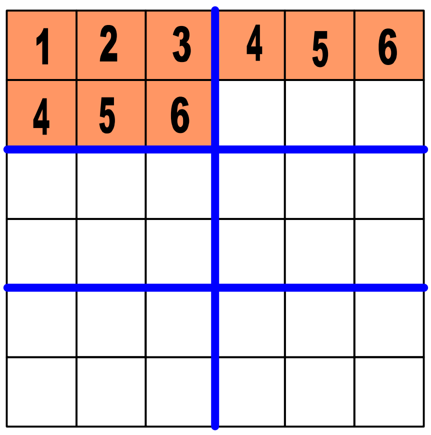
Für dieses Vorgabemuster gibt es genau die 3 abgebildeten SQ als Lösungen. Jedes ist Repräsentant einer Äquivalenzklasse mit 2·2·24=96 Elementen (die 2en für die je zwei Möglichkeiten, Zeilen oder Spalten zu tauschen und die 24 für die Permutationen).
Spiegelt man das mittlere SQ an der eingezeichneten Diagonalen und führt danach die Permutation 1-3, 2-1, 3-2, 4-4 aus, so erhält man das SQ rechts.

Bearbeitungshinweise für 6x6- und 9x9-Sudokus

Mit Hilfe des Programms kann experimentell untersucht werden, welche Möglichkeiten es für die Anzahl der Vorgaben in SR gibt. Einige der bisher abgebildeten 9x9-SR enthalten 24 Vorgaben (das bisher nur experimentell ermittelte Minimum scheint 17 zu sein). Andererseits kann man aber auch 77 Vorgaben so eintragen, daß keine eindeutige Lösung möglich ist. Ein Rätsel mit nur 17 Vorgaben findet man in Kapitel 2.1. Ebenso kann man sich für die mittlere Variante experimentell einen Überblick über mögliche Vorgabemuster verschaffen.

Von den strukturellen Überlegungen hinsichtlich dieser Frage beim Mini-Sudoku kann ein Ergebnis leicht übertragen werden: Eine Vorgabe für das 9x9-Sudoku muß mindestens 8 verschiedene Zahlen enthalten. Dies ist allerdings nur eine banale Erkenntnis.

In Hinblick auf die Frage, wie viele SQ es jeweils gibt, kann wohl nicht mehr allein „per Hand“ gearbeitet werden. Es dauert auch zu lange, das Programm ohne irgendwelche Vorgaben auf Lösungssuche zu schicken. Man sollte hier von vornherein die Äquivalenzklassen bezüglich der Permutationen „en bloc“ zählen. Dazu läßt man das Programm z.B. mit dem abgebildeten Vorgabemuster laufen. <u>Jedes</u> 6x6-SQ kann nämlich durch eine Permutation so verändert werden, daß im Rechteck oben links die Zahlen von 1 bis 6 in der gewählten Ordnung stehen. Danach kann durch Zeilentauschoperationen für eine wohlsortierte erste Zeile gesorgt werden.

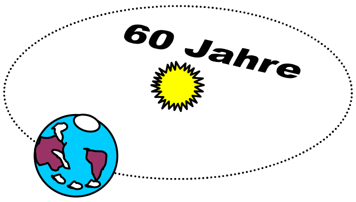


Das Programm zählt dann 6528 verschiedene Lösungen. Jede dieser Lösungen repräsentiert eine Äquivalenzklasse mit 6!·3!=4320 Elementen.

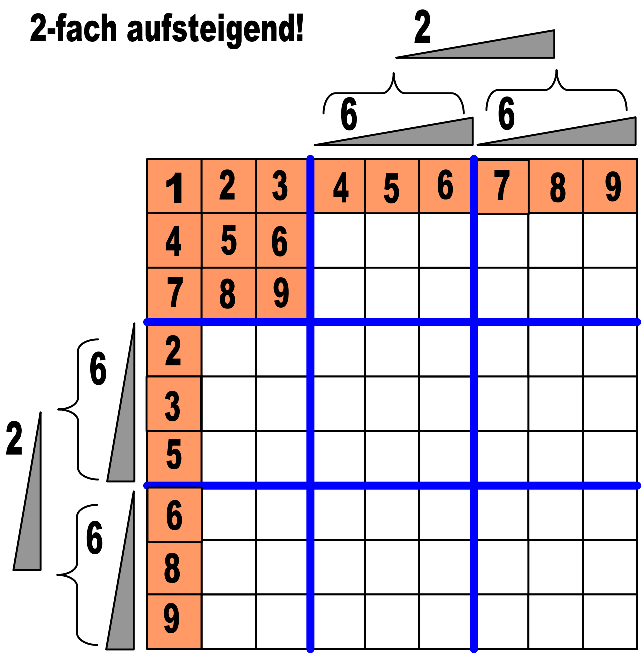
Daher gibt es 28.200.960 verschiedene SQ. Identifiziert man alle SQ, die durch Permutationen und Spalten- und Zeilentauschoperationen ineinander überführbar sind, findet man 6528/8 = 816 Lösungen. In welche und wie viele Klassen diese wiederum zusammenfallen, wenn man noch die Kongruenzabbildungen hinzunimmt, ist eine interessante Frage, die hier aber nicht beantwortet wird.

Die benutzten Strategien zur Verkürzung der Rechenzeit durch Äquivalenzklassenbildung sind beim 9x9-Sudoku von entscheidender Bedeutung. Für jedes SQ gibt es eine Permutation, die das Quadrat oben links in der abgebildeten Art belegt. Man kann danach durch Zeilen- und Spaltentauschoperationen dafür sorgen, daß die Zahlen innerhalb der „Dreierstreifen" sortiert sind und dafür, daß der Dreierstreifen mit der kleineren dreistelligen Zahlen zuerst kommt (das ist mit „2-fach aufsteigend" im Bild unten gemeint).

Hier kann die Rechenzeit um Zehnerpotenzen gekürzt werden. SQ die zum folgenden Vorgabemuster passen (also die Anzahl der Lösungen zu diesem Vorgabemuster) repräsentieren Äquivalenzklassen mit $9! \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6$ = 1.881.169.920 Elementen. **Das entspricht ungefähr der Anzahl der Sekunden von 60 Jahren**!



Über eine Zusammenstellung aller „2-fach aufsteigenden" Vorgabemusters kann die Zählarbeit für die Gesamtzahl aller SQ aufgeteilt werden.



Man kann auf diesem Weg die Gesamtzahl aller 9x9-SQ bestimmen. Die Größe der Äquivalenzklassen ist unproblematisch, wenn man Identifikationen durch Spiegelungen und Drehungen nicht betrachtet.

Mit diesen wird es kompliziert (obwohl eine Äquivalenzklassenbildung <u>nur unter Kongruenzabbildungen</u> wiederum einfach ist, jede Klasse hat 8 Elemente, denn es kann keine SQ geben, die durch eine der Kongruenzabbildungen des Quadrates in sich selbst überführt werden).

2.3 Summen-Sudoku

Tafel 1 ist definiert eine Additionsmethode für ganze Zahlen zwischen 1 und 6 die sicherstellt, daß das Ergebnis wieder in diesem Bereich liegt und jede Gleichung der Form a + x = b lösbar ist (d.h. in jeder Zeile und jeder Spalte kommt jede Zahl genau einmal vor). Außerdem gibt es ein „neutrales Element“ (die 6) und für diese Art der Addition gilt das Assoziativgesetz. Tafel 1 ist eine **Gruppentafel der Restklassengruppe modulo 6**. Ein Beispiel zeigt, wie man rechnet: 5 + 4 = 9 und 9 - 6 = 3 (reduzieren, da das Ergebnis den Zahlbereich von 1 bis 6 verlassen hat).

Tafel 1

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	1
2	3	4	5	6	1	2
3	4	5	6	1	2	3
4	5	6	1	2	3	4
5	6	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

noch kein SQ!

(nur ein „lateinisches Q.“)

Tafel 2

Additionstafel

und

Sudoku

Summen-SQ

+	**1**	**3**	**5**	**2**	**4**	**6**
1	2	4	6	3	5	1
2	3	5	1	2	4	6
3	4	6	2	5	1	3
4	5	1	3	6	2	4
5	6	2	4	1	3	5
6	1	3	5	2	4	6

Information zum mathematischen Hintergrund

Diese Art der „Addition“ stammt aus der Teilbarkeitslehre. Beim Teilen durch 6 können nur die Zahlen von 1 bis 5 als Rest bleiben, oder die Teilung geht auf. Also gibt es hinsichtlich der Division durch 6 nur sechs „Sorten“ von Zahlen (man sagt statt „Sorten“ auch „Äquivalenzklassen“).

Üblicherweise benutzt man die Zahlen von 0 bis 5 um eine Äquivalenzklasse festzulegen. Hier werden die Zahlen von 1 bis 6 benutzt, da dies bei Sudoku üblich ist (die 6 steht also für die 0, denn sie läßt bei der Division durch 6 den Rest 0).

Addiert man eine Zahl, deren Rest 4 ist - z. B. 22 - mit einer Zahl, deren Rest 5 ist - z. B. 11-, so erhält man 33 und diese läßt bei Division durch 6 den Rest ***4 + 5 ≡ 3 modulo 6*** *(lies: 4 + 5 ist kongruent 3 modulo 6). Entsprechend kann man mit anderen von 6 verschiedenen Teilern verfahren.*

▶ Aufgabe 1

Man konstruiere für alle Feldgrößen (4x4, 6x6- und 9x9) Additionstafeln modulo n (n = 4, 6, 9), die gleichzeitig SQ sind.

Um konkrete Beispiele zu finden hilft das Programm. Man öffne durch einen Klick auf 

die gekreuzten Schwerter die Kopfzeile und –spalte und gebe dort jeweils Zahlen zwischen 1 und n ein. Ein Klick auf „+“ trägt in die Felder dann die Summen ein. In der Menüleiste muß unter „Additionsgruppe“ der erste Eintrag aktiviert sein.

Es gibt Randbelegungen, die dasselbe Innenfeld erzeugen.

▶ Aufgabe 2

	1	3	2	4
2				
1				
4				
3				

	3	1	2	4
1				
2				
4				
3				

	1	3	4	2
3				
4				
2				
1				

Mit der gewählten Randbelegung und der Addition modulo 4 erzeugt man 3 Summen-SQ. Zwei von ihnen unterscheiden sich im Inneren allerdings nicht.
Man prüfe das nach und bestimme die Anzahl der Randbelegungen, die Summen-SQ erzeugen. Wie viele (im Inneren) verschiedene SQ werden von diesen erzeugt?

Summen-Sudokus können auch „versteckt“ auftreten. Dazu ein Beispiel:

Tafel 3 zeigt ein Summen-SQ, Tafel 5 scheinbar nicht, denn dort klappt die Erzeugung des Innenfeldes durch die Addition der Randzahlen nicht.

In Tafel 4 wurden die Zahlen durch Buchstaben ersetzt. Für Tafel 5 wurden die Buchstaben dann wieder durch Zahlen ersetzt. In Tafel 5 „versteckt“ sich also Tafel 3. Tafel 5 ist von derselben Gestalt wie Tafel 3 (in der Mathematik sagt man „**isomorph**[1] **zu**“) . Man kann – rückwärts gedacht – Tafel 5 durch eine Vertauschung (Permutation) in Tafel 3 überführen.

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
3	4	1	2	3
2	3	4	1	2
4	1	2	3	4

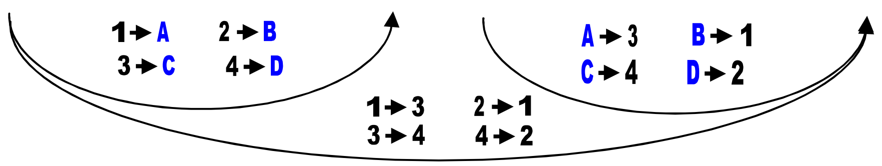
Tafel 3

	A	B	C	D
A	B	C	D	A
C	D	A	B	C
B	C	D	A	B
D	A	B	C	D

Tafel 4

	3	1	4	2
3	1	4	2	3
4	2	3	1	4
1	4	2	3	1
2	3	1	4	2

Tafel 5



Man erkennt diese „Isomorphie“ auch ohne die vorgenommene Transformation an demselben „Typmuster Q + R + 2V“ (die Zahlen sind in einem Quadrat, einer Raute und 2 Vierecken in gleicher relativer Lage angeordnet). Das ist in den Tafeln angedeutet.

▶ Aufgabe 3
Wie viele der 288 Mini-SQ (vgl. voriges Kapitel) sind Summen-SQ bezüglich der Restklassengruppe modulo 2? Hierbei sollen auch diejenigen mitgezählt werden, die erst nach einer passenden Permutation eine Additionstafel hinsichtlich der normalen Resteaddition darstellen.

(Im „math. Jargon“ fragt man hier: Wie viele Mini-SQ sind isomorph zur Gruppentafel der Z_4?)

[1] aus dem Griechischen

▶ Aufgabe 4

	1	7	4
3	4	1	7
5	6	3	9
1	2	8	5

	1	6	4
3	4	9	7
5	6	2	9
1	2	7	5

Additionstafeln modulo 9 erfüllen natürlich auch „von selbst“ die Bedingung, daß in jeder <u>Zeile</u> und in jeder <u>Spalte</u> jede Zahl zwischen 1 und 9 genau einmal vorkommt. Wenn man Summen-SQ erzeugen will, muß man die Kopfzeile und -spalte also so geschickt anordnen, daß auch in den ***Unterquadraten*** ebenfalls alle Zahlen von 1 bis 9 genau einmal vorkommen. Eine Möglichkeit ist abgebildet, das Beispiel rechts „funktioniert nicht“.
Wie viele „funktionierende Anordnungen der Kopfzeile und -spalte“ gibt es insgesamt?

▶ Aufgabe 5

Wie viele Randbelegungen erzeugen 9x9-Summen-SQ (in der Restklassengruppe modulo 9 gerechnet und ohne Permutationen der Zahlen von 1 bis 9) und wie viele verschiedene SQ werden erzeugt (einige Randbelegungen erzeugen im Innenfeld dieselbe Belegung)?

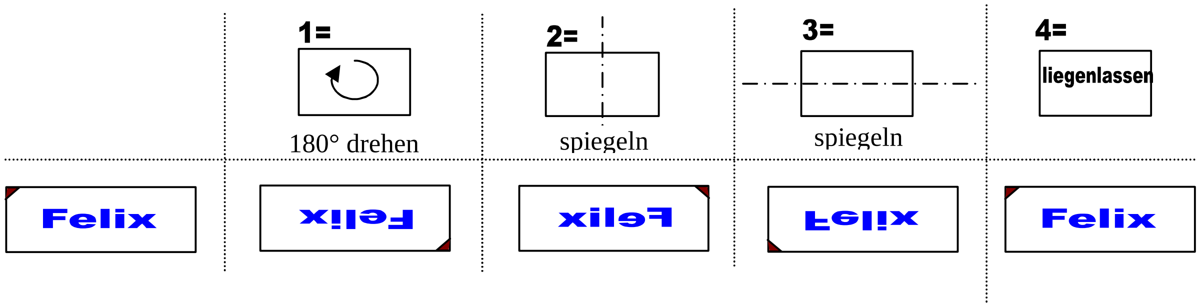
Man kann natürlich noch andere „Additionsarten“ erfinden. Tafel 6 legt Regeln für eine weitere Additionsmethode fest. Auch für diese gilt das Assoziativgesetz.

	1	**2**	**3**	**4**
1	4	3	2	1
2	3	4	1	2
3	2	1	4	3
4	1	2	3	4

Tafel 6

Wie man sieht, ergibt hier jedes Element mit sich selbst verknüpft die 4 und diese spielt offenbar auch bei dieser Verknüpfung die Rolle des „neutralen Elements“. Jedes Element ist also sein eigenes Inverses.
Diese Struktur wird bei der folgenden Deutung der Zahlen von 1 bis 4 besonders hübsch sichtbar. Die folgende Tabelle zeigt, was mit einem durchsichtigen beschrifteten Rechteck geschieht, wenn man vier Operationen vornimmt:

2 Spiegelungen, eine 180°-Drehung und die „Nulloperation“ (das Liegenlassen).



Jede Operation macht sich selbst rückgängig und „4“ bewirkt nichts. Was geschieht aber, wenn man erst „3“ und dann „2“ auf das Rechteck anwendet? Man bemühe zuerst seine Vorstellungskraft und sehe dann in der Additionstafel nach: Man erhält „1“.

Man kann die Zahlen von 1 bis 4 also mit 2 verschiedenen Verknüpfungen versehen die sicherstellen, daß man innerhalb dieser Menge von 4 Zahlen widerspruchsfrei rechnen kann.

Die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 4 versehen mit der Addition modulo 4 bezeichnet man als **Restklassengruppe modulo 4**.

Die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 4 versehen mit der in Tafel 6 festgelegten Addition (man nennt eine solche Tafel auch **Gruppentafel**) bezeichnet man als **Kleinsche Vierergruppe** (nach dem Mathematiker Felix Klein, 1849 - 1925).

Für beide Additionsmethoden gilt das Assoziativgesetz. Außerdem gibt es in beiden Fällen ein sogenanntes **neutrales Element** (die 4). Die Addition dieses Elements hat „keinen Effekt“. Das Element entspricht der „0“ bei den ganzen Zahlen.

Neben den Restklassengruppen kann man noch weitere Gruppen durch eine einfache Festlegung der Addition für n Elemente erzeugen. Das Verfahren wird am Beispiel n=9 erläutert:

Zunächst stellt man die Zahlen von 0 bis 8 mit Hilfe der 3 dar (für Sudoku identifiziert man die 0 mit der 9):

0 = 0*3 + 0 = **(0, 0)**	**1** = 0*3 + 1 = **(0, 1)**	**2** = 0*3 + 2 = **(0, 2)**
3 = 1*3 + 0 = **(1, 0)**	**4** = 1*3 + 1 = **(1, 1)**	**5** = 1*3 + 2 = **(1, 2)**
6 = 2*3 + 0 = **(2, 0)**	**7** = 2*3 + 1 = **(2, 1)**	**8** = 2*3 + 2 = **(2, 2)**

Dann definiert man die Addition stellenweise: (1, 2) + (1, 1) = (1+2, 1+1) = (2,0)
5 + 4 = 6

Man rechnet dazu komponentenweise modulo 3. Wie man sieht, entsteht so eine Additionsmethode, die sich von der Addition modulo 9 unterscheidet.

Wenn man die Restklassengruppe modulo 3 mit Z(3) bezeichnet, so handelt es sich hier also um die Gruppe Z(3) x Z(3) (sprich Z(3) kreuz Z(3)), das sogenannte kartesische Produkt der beiden Restklassengruppe.

Anmerkung: Z(2) x Z(2) ist mit der oben genannten Kleinschen Vierergruppe identisch.

Man kann alle in diesem Abschnitt aufgeworfenen Fragen auch hinsichtlich von Summen-SQ für diese Gruppen stellen. Im Programm werden auch diese Gruppen angeboten.

▶ Aufgabe 6

Man zeige, daß jedes Mini-SQ entweder als Summen-SQ zur Restklassengruppe modulo 4 oder als Summen-SQ zur Kleinschen Vierergruppe aufgefaßt werden kann.

Man kann auch zeigen, daß es 9x9-Sudokus gibt, die sicherlich keine Gruppentafeln sind.

Bearbeitungshinweise

▶ *zu Aufgabe 1*

Auf experimentellem Weg können mit Hilfe des Programms viele Lösungen gefunden werden. Bei genauem Hinsehen kristallisieren sich Muster heraus.

Das Bild zeigt 4 Möglichkeiten für Belegungen der Kopfzeile und -spalte um in einem Unterquadrat eines 9x9-SQ alle Zahlen von 1 bis 9 zu erzeugen:

	1	4	**7**
1	2	5	8
2	3	6	9
3	4	7	1

	3	8	4
2	5	1	6
8	2	**7**	3
5	8	4	9

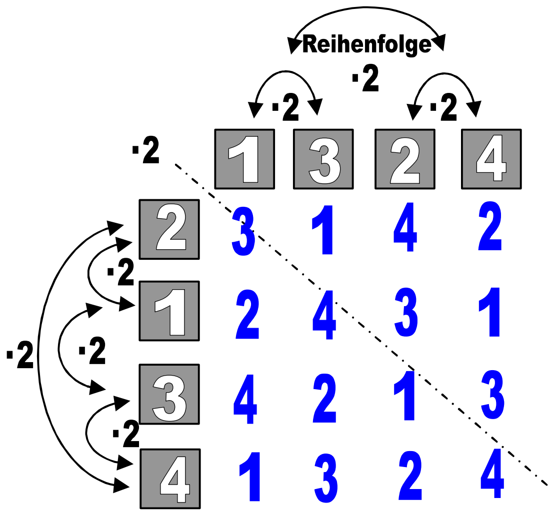
	4	9	2
9	4	9	2
3	7	3	5
6	1	6	8

	4	7	1
9	4	7	1
8	3	6	9
7	2	5	8

Auffällig ist, daß stets - entweder in der Kopfzeile oder der Kopfspalte - nur gleiche Dreierreste vorkommen bzw. jeder Dreierrest genau einmal vorkommt. Andere Möglichkeiten findet man nicht. Für Summen-Mini-SQ findet man Entsprechendes.

▶ *zu Aufgabe 2*

Entweder treten in der Kopf<u>zeile</u> oder der Kopfspalte dieselben Zweierreste als Paare über bzw. neben den Unterquadraten auf. Das sind 2 Möglichkeiten. Für das Bild wurde die Kopfzeile gewählt. In der Kopfzeile kann zuerst das Paar 1-3 oder das Paar 2-4 auftreten. Das sind 2 Möglichkeiten. Jedes Paar kann in zwei Sortierungen auftreten, das sind noch einmal 2·2 Möglichkeiten. In der Kopf<u>spalte</u> findet man durch ähnliche Überlegungen 16 Möglichkeiten.
Diese Randbelegungen sind alle verschieden, und weitere gibt es nicht.



Also gibt es 2^8 = 256 verschiedene Randbelegungen, die Summen-SQ erzeugen.

Allerdings erzeugen manche dieselbe Belegung für das Innere des 4x4-Quadrates. Die 256 verschiedenen Randbelegungen erzeugen nur 64 verschiedene SQ. Das sieht man so: Falls man zu einem Summen-SQ eine passende Randbelegung sucht, hat man 4 Möglichkeiten, eine Position am Rand beliebig zu besetzen. Dann ergibt sich der Rest zwangsläufig. Die abgebildeten 4 Summen-SQ illustrieren diese Struktur.

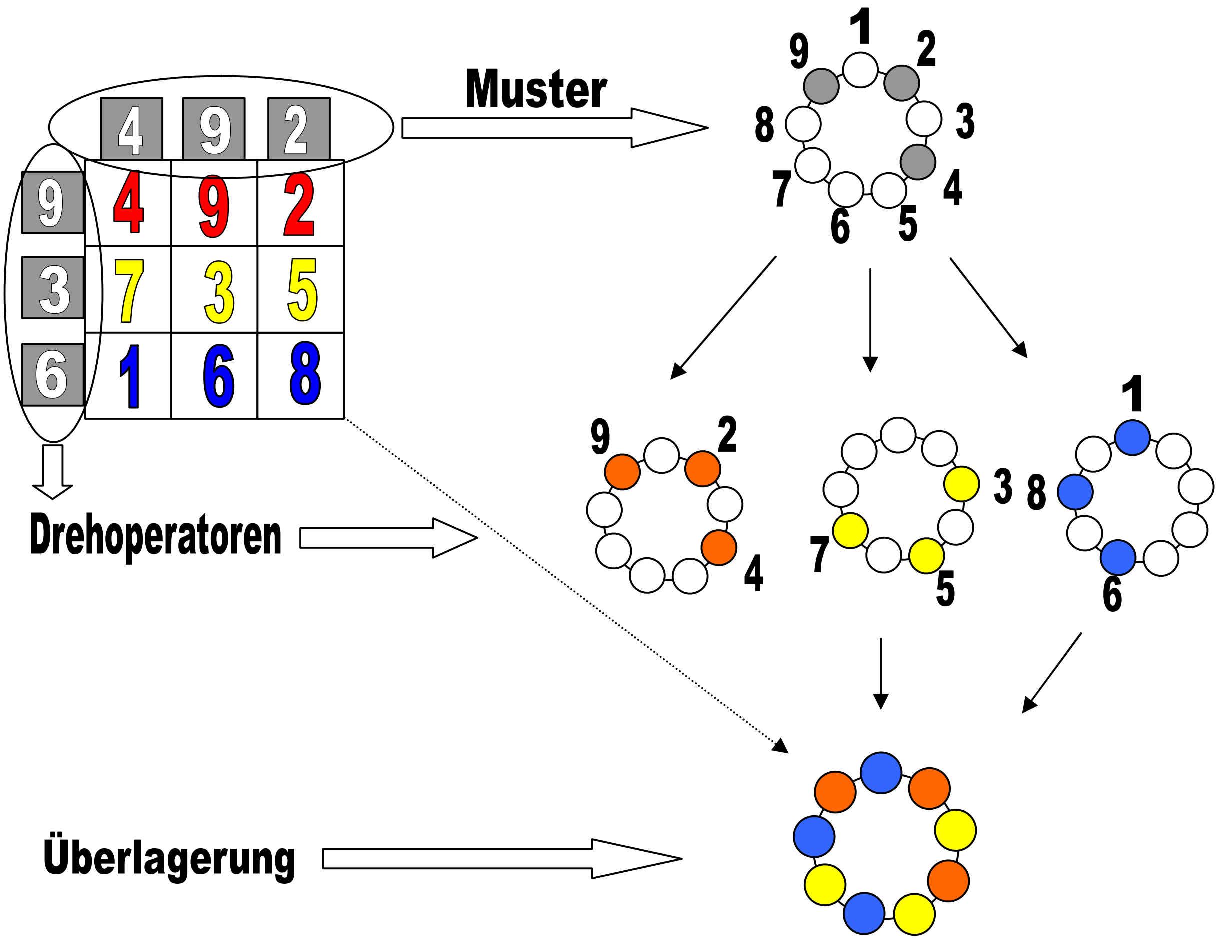
Daher gibt es 64 verschiedene Summen-SQ.

▶ *zu den Aufgaben 3 und 6*

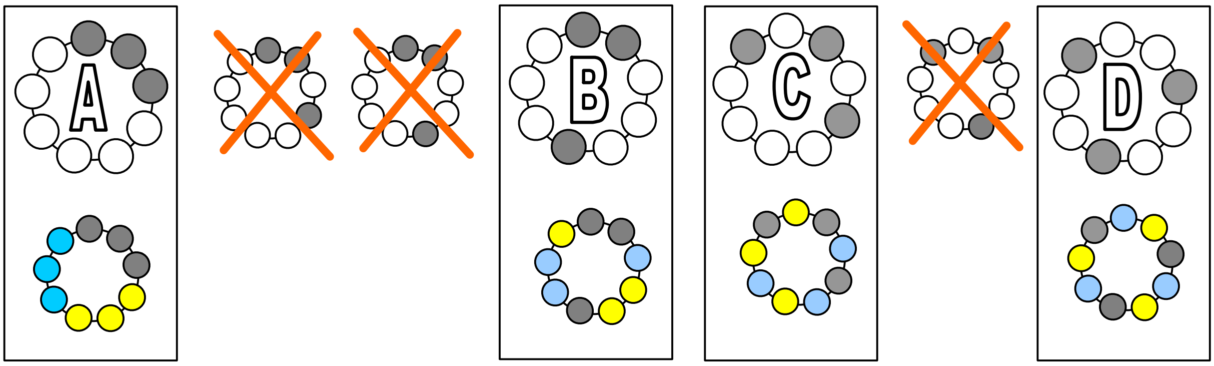
Zwei Drittel der 288 SQ, also 192 sind Summen-SQ und isomorph zur Gruppentafel der Restklassengruppe modulo 4 (Hinweis für Algebrainteressierte: die restlichen sind isomorph zur Gruppentafel der Kleinschen Vierergruppe). Man kann das mit Hilfe der im vorigen Kapitel konstruierten 3 Äquivalenzklassen leicht nachweisen.

▶ *zu Aufgabe 4*

Das folgende Bild illustriert eine **graphische Deutung** der Erzeugung eines Unterquadrats im 9x9-Sudoku, das mit den Zahlen von 1 bis 9 belegt ist.



Man kann die Kopfzeile als Muster einer „Perlenkette" deuten. Sie besteht aus 9 Perlen, von denen drei gefärbt sind. Die Addition der Kopfspalte entspricht dann der Produktion von drei gedrehten Perlenketten. Wenn in dem Unterquadrat jede Zahl von 1 bis 9 genau einmal vorkommen soll, muß beim Übereinanderlegen der drei gedrehten Ketten an jeder Stelle einmal Farbe auftreten.
Das folgende Bild zeigt alle möglichen Muster für eine solche Perlenkette. Zu den durchgestrichenen gibt es kein Set aus drei gedrehten Partnern, so daß alle Stellen einmal besetzt sind. Bei den anderen sind die notwendigen Überlagerungen mit gedrehten Kopien eingezeichnet.



zu A, B und C: Das Muster besteht aus 3 verschiedenen Dreierresten, alle Drehoperatoren haben denselben Dreierrest.

zu D: Das Muster besteht aus 3 gleichen Dreierresten, zu jedem Dreierrest gibt es einen Drehoperator.

Damit ist die Struktur der Kopfzeile und -spalte festgelegt: Man schreibt in die drei Felder der Kopfzeile 3 Zahlen mit demselben Dreierrest und in die drei Felder der Kopfspalte 3 Zahlen mit verschiedenem Dreierrest (oder umgekehrt). Dann ergeben sich im 3x3-Unterquadrat alle Zahlen von 1 bis 9 genau einmal. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht. (Das Ergebnis kann singgemäß auf Mini-Sudokus, 6x6-Sudokus und weitere Feldgrößen übertragen werden.)
Es gibt $9\times3\times1 \times 9\times6\times3 \times 2 = 5832$ verschiedene Kombinationsmöglichkeiten hierfür.

▶ *zu Aufgabe 5*

Die Überlegungen zu Aufgabe 3 kann man auf diesen Fall (und auch auf 6x6-SQ) übertragen.

Für die Kopfzeile findet man $K = 3!\cdot(3!)^3$ mögliche Belegungen.

Für die Kopfspalte findet man $S = (3!)^6$ mögliche Belegungen.

Dabei wird ausgenutzt, daß in der Kopfzeile stets dieselben Reste modulo 3 in Dreiergruppen nebeneinander stehen.
Zusätzlich kann man die Kopfspalte und Kopfzeile vertauschen. Daher wird die Gesamtzahl der Belegungen noch einmal mit 2 multipliziert.

Es gibt also $2\cdot(3!)^{10}$ = 120.932.352 Randbelegungen, die SQ erzeugen.

Diese erzeugen 13.436.928 verschiedene SQ (die größere Zahl durch 9 geteilt). Das entspricht ungefähr der Anzahl der Sekunden von 150 Tagen.

Im nächstgrößeren Fall bei einem 16x16-Sudoku erzeugt man Summen-SQ auf die beschriebene Art. Das entspricht ungefähr der Anzahl der Sekunden des Erdalters.

$2\cdot(4!)^{3\cdot4+1}$ $\dfrac{2\cdot 4!^{34+1}}{16}$

3. Offene Fragen

Mit den Fragen ist es ähnlich wie mit den Wünschen, von denen der Volksmund sagt, daß jeder Wunsch der in Erfüllung geht, augenblicklich „Junge“ bekommt. Letzteres ist jedoch nicht unbedingt erfreulich. Hinsichtlich der Fragen sieht die emotionale Bewertung jedoch anders aus: Das Vergnügen sorgt selbst für seine Fortsetzung. Es ist eine positive Rückkopplung. Als Anregung folgt eine (sicher unvollständige) Zusammenstellung offener Fragen zu den einzelnen Kapiteln.

<u>zu 2.1. Lösungsstrategien</u>

„Vernünftige Lösungsstrategien“ berücksichtigen mindestens zwei Aspekte: Sie müssen kombinatorisch korrekt und „per Hand“ leicht durchführbar sein. Letzteres bedeutet, u. a., daß das Arbeitsgedächtnis (welches nach einer psychologischen Faustregel nur sieben Dinge gleichzeitig speichern kann) nicht überlastet werden darf. Man bewegt sich dabei gewissermaßen auf einer sportlichen mentalen Ebene und ist an eleganten Denkprozessen interessiert. Eine Lösung mit irgendwelchen Hilfsmitteln zu finden, ist kein rechter Anreiz und die Möglichkeit, einen Backtrack-Algorithmus zu programmieren oder per Hand durchzuführen, der jedes Sudoku sicher löst, macht das Rätsel daher auch nicht uninteressant.

Das hier abgebildete Rätsel mit 26 Vorgaben wurde dem Verfasser von einem Sudokuprofi zugeschickt und ist allein mit den oben beschriebenen Lösungsstrategien nicht lösbar.

	5				1	6		
3		6						
		9	3			2		4
				3		1		2
			8		4			
8		5		2				
6		1			5	3		
						9		1
		7	2				4	

Nach schnellen Anfangserfolgen stagniert der Lösungsprozess überraschend schnell: mit den vorgestellten Strategien findet man nur 9 Zahlen und muß dann mit „coloring“ oder anderen Methoden des Backtrackings fortfahren.

Hier stellt sich die Aufgabe:

▶ Man entwickle Lösungsstrategien, die auch dieses Rätsel lösen.

Da man im abgebildeten Rätsel (nach dem Festfahren des Lösungsprozesses) für jede einzelne Zahl mindestens 2 mögliche <u>Verteilungen</u> finden kann, müßte das eine Strategie sein, die mindestens die möglichen Verteilungen <u>zweier</u> verschiedener <u>Zahlen</u> betrachtet.

▶ Wie lassen sich gezielt Rätsel konstruieren, für deren Lösung die vorgestellten Strategien (natürlich ohne Backtracking) nicht ausreichen?

Man findet in Rätselheften selten, aber doch ab und zu solche Vorgaben. Leider sieht man diesen aber erst im Bearbeitungsverlauf an, daß sie den vorgestellten Strategien widerstehen und man gezwungen ist, Bachtracking hinzuzunehmen.

Das beschriebene Strategienset ist also unvollständig. Hier stellt sich die Frage:

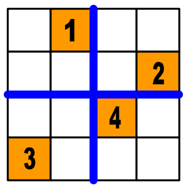
▶ Kann man die vorgestellten Strategien in dem Sinne komplettieren, daß das größere Set dann – in geeigneter Reihenfolge angewandt – alle denkbaren Rätsel lösen kann?

Wenn man Spaß am Programmieren hat, könnte man sich alle beschriebenen und neuen selbst ausgedachten Strategiewerkzeuge per Mausklick zur Verfügung stellen und erst einmal experimentell auf ein Set schwieriger Rätsel anwenden.

„Verabredungsgemäß“ redet man nur dann von einem Sudoku-Rätsel, wenn klar ist, daß es genau eine Lösung gibt.

▶ Wie weit kann man (alle oder einige) Vorgabemuster für Sudoku-Rätsel beschreiben?

Für das 4x4-Sudoku hat der Verfasser eine vollständige Beschreibung aller Vorgabemuster. Eine Teilmenge wird beispielsweise durch die Forderung „verteile die Zahlen von 1 bis 4 so, daß in jeder Unterstruktur genau eine Zahl steht“ beschrieben („Unterstrukturen“ sind dabei Zeilen, Spalten und Quadrate).



▶ In Zeitungen findet man „leichte“ und „schwere“ Rätsel. Man entwickle verschiedene objektive Kriterienmodelle für diese Art der Klassifizierung.

zu 2.2. Kombinieren und Zählen

Einige der im Kapitel formulierten Zählfragen laufen auf die Befüllung der folgenden Tabelle hinaus:

Äquivalenz	keine	K	ZT	P	K+ZT	K+P	ZT+P	K+ZT+P
4x4	288	39		12			3	2
6x6	28200960			39168			816	
Doppel 6x6	1393920			1936				
9x9								

In den Spaltenköpfen stehen Äquivalenzumformungen. Es bedeutet:

K: Kongruenzabbildung

ZT: Zeilen- und Spaltentauschoperationen

P: Permutationen

In den Feldern steht jeweils die Anzahl der verschiedenen Sudoku-Quadrate wenn man diejenigen identifiziert, die unter der gewählten Relation äquivalent sind. In der ersten Spalte wird überhaupt nicht identifiziert, in Spalte K wird alles identifiziert, was durch Drehung oder Spiegelung zur Deckung gebracht werden kann usw.

Zu jeder Angabe der Anzahl verschiedener Sudoku-Quadrate muß natürlich offengelegt werden, in welchem Sinne identifiziert wurde.

▶ Man vervollständige die Tabelle!

zu 2.3. Summen-Sudokus

Dieses Kapitel sollte einen kleinen Einblick in klassische elementare mathematische Strukturfragen geben. Dabei wurde der Kontakt zum ursprünglichen Rätsel etwas gelockert. Es könnte jedoch sein, daß Sudoku-Quadrate, die gleichzeitig Gruppentafeln der Restklassengruppen sind, auch interessante weitere Eigenschaften haben (vielleicht kann man mit ihrer Hilfe Rätsel mit besonders wenig Vorgaben erzeugen o. Ä.).

Leichtere Aufgaben, als solche Zusammenhänge aufzudecken sind sicher die folgenden:

▶ Man zeige, daß es kein Doppel-Sudoku-Quadrat gibt, welches gleichzeitig eine Gruppentafel der Restklassengruppe modulo 6 oder der Z2 x Z3 ist.

▶ Wie viele 6x6-Sudoku-Quadrate sind gleichzeitig Gruppentafeln der Restklassengruppe modulo 6?

Natürlich kann man diese Fragen auch in Hinblick auf andere Gruppen und andere Rätselformate stellen.

An dieser Stelle sei für mathematisch vorgebildete Leser noch erwähnt, daß diese Fragen den Spuren der Eulerschen Methoden (siehe Vorwort) folgen: Die dort erwähnte „Offiziersaufgabe“ wurde von ihm und späteren Mathematikern mit zahlentheoretischen und algebraischen Methoden bearbeitet. Dabei wurde auch ausgenutzt, daß die Teilungsreste bezüglich Primzahlpotenzen nicht nur eine Gruppe sondern – mit einer geeigneten Multiplikation – sogar einen Körper bilden. Man erhält dann Lösungen der Offiziersaufgabe aus den Lösungen eines Gleichungssystems.

Zum Schluß dieses Kapitels:

Sicherlich werden dem Leser noch viele weitere Fragen zu den einzelnen Kapiteln und Fragen ganz anderer Art begegnet sein.

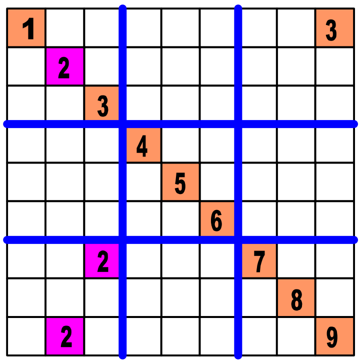
Das im folgenden Kapitel beschriebene Computerprogramm kann u. a. als nützliches Werkzeug zur Produktion von Anschauungsmaterial eingesetzt werden.

Ganz zum Schluß soll noch auf den hohen Wert der Anschauung als Grundlage jeder tiefergehenden Erkenntnis durch den folgenden Aphorismus von Goethe aufmerksam gemacht werden:

Denken ist interessanter als Wissen, aber nicht als Anschauen.

4. Programmbeschreibung

4.1 Das Spielfeld

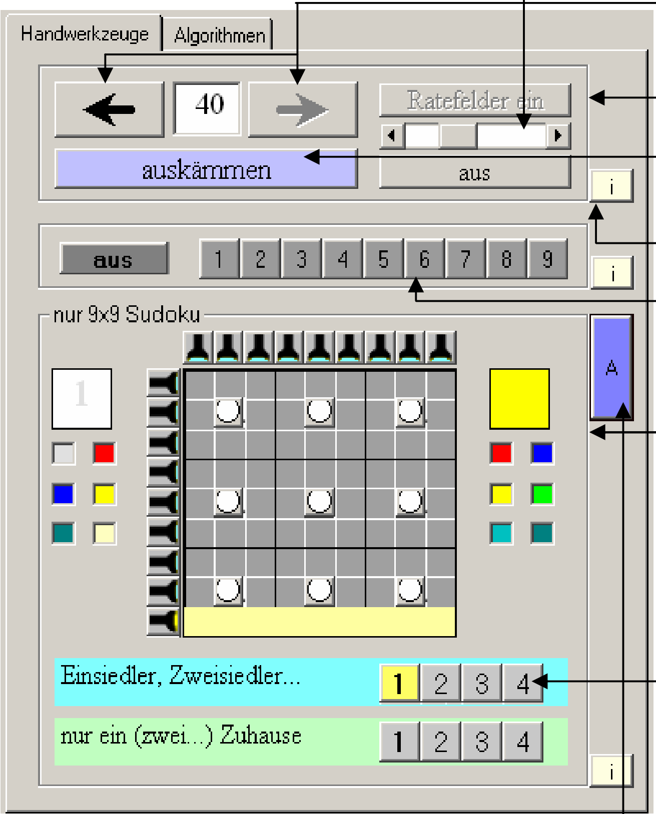


ist die wichtigste Eingabefläche. Durch einen Klick auf das gewünschte Quadrat wird dieses „geöffnet“ und man kann eine Ziffer von 1 bis 9 eintragen. Sobald das Feld den Fokus verliert (man also auf irgendein anderes Steuerelement klickt), wird der Eintrag rot eingefärbt um ihn als Vorgabe kenntlich zu machen. Bei einer unerlaubten Eingabe die im Widerspruch zu schon vorhandenen Eingaben steht, werden die im Konflikt stehenden Felder lila markiert. Man kann hier also selbst ausgedachte oder fremde Vorgaben einfach eintippen. und Sudoku-Rätsel bequem per Hand lösen.

4.2 Handwerkzeuge

Ratefelder stufenlos ein- und ausblenden

Aktionen **rückgängig** machen (bis 200) bzw. **auf dem Lösungsweg navigieren** (wie beim Internet-Explorer).

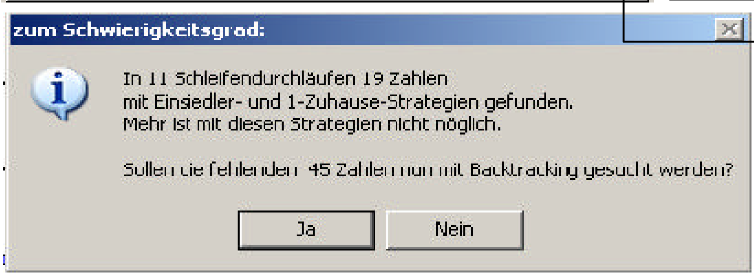


In die Rätselfelder werden kleine „**Ratefelder**“ gesetzt. Man kann in diesen **Markierungen** vornehmen bzw. vornehmen lassen.

Ratefelder mit nicht mehr möglichen Zahlen **automatisch ausblenden**.
Informationen anzeigen
Felder, auf denen eine 6 stehen kann, blau **hervorheben** (Farbe unten wählbar).

In diesem Feld wählt man aus, welchen Bereich man **nach** gewissen **Mustern durchforsten** will und die Farben für Markierungen.

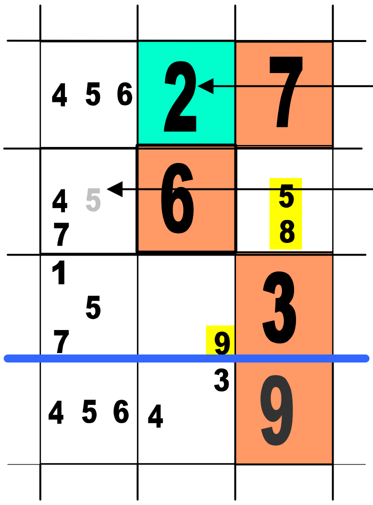
Im einfachsten Fall sucht man zum Lösen eines Rätsels in den Streifen bzw. Unterquadraten nach Feldern, auf denen nur eine Zahl stehen kann (**„Einsiedlerzahl“ = 1 Feld mit nur einer Zahl**) bzw. nach Zahlen, die nur auf ein Feld gesetzt werden können (**„nur ein Zuhause“ = 1 Zahl (paßt) auf nur 1 Feld**).
(Verallgemeinerungen siehe Kapitel 2.1)
Die gefundenen Ratefelder werden markiert.



Analyse:
Wie weit kommt man mit der iterativen Anwendung von Einsiedler- und Ein-Zuhause-Strategien? Rückmeldung in einem separaten Fenster.

Es ist nicht klar, welche Sequenz der gewählten Lösungsschritte beim Lösen eines Sudokus die günstigste ist. Mit dem Programm kann man an der Lösung dieser Frage arbeiten.

Die Ratefelder bieten einige Möglichkeiten, die Bleistift und Radiergummi durch wesentlich bequemere Hilfsmittel ersetzen.



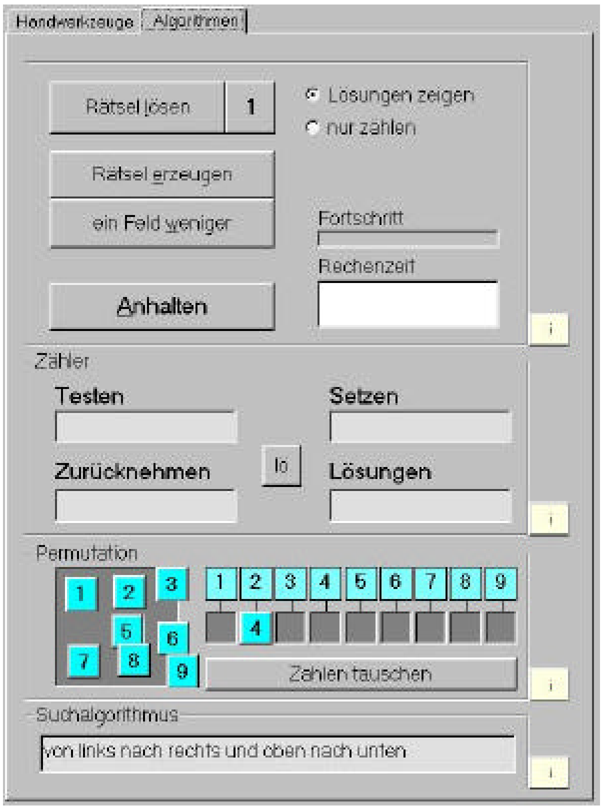
Durch einen Klick auf die linke Maustaste wird die angeklickte **Zahl** versuchsweise **gesetzt** (auf grünem Hintergrund). Man kann das durch abermaliges Klicken **rückgängig** machen.

Durch einen Klick auf die rechte Maustaste wird ein **Eintrag gefärbt** (um ihn **per Hand** versuchsweise **auszuschließen**). Durch einen abermaligen Klick kann er wieder reaktiviert werden.

Die gelb markierten Felder gehen auf den Einsatz einer **strategischen Suche** zurück (s. o.).

Ratefelder für Zahlen, die man sicher ausschließen kann werden durch einen Klick auf „auskämmen" **deaktiviert**.

4.3 Algorithmen



Rätsel lösen:
Das im Spielfeld zu sehende Rätsel wird vom Programm bearbeitet. Ob dieses per Hand eingetippt, vom Programm erzeugt oder aus einer Datei geladen wurde, spielt keine Rolle. Im Ausgabefeld Zähler wird die **Anzahl der gefundenen Lösungen** für das Rätsel angezeigt. Der Algorithmus arbeitet mit einem Backtrack-Verfahren (s. „Testen, Setzen, Zurücknehmen" auf der folgenden Seite) und findet alle Lösungen. Man kann den Algorithmus auf dem Spielfeld „bei der Arbeit beobachten". Die Felder, über deren Belegung schon „nachgedacht" wurde, werden gelb eingefärbt. Schließlich wird die Lösung angezeigt. Über das Menüfeld Suchalgorithmus kann man auf die Arbeitsweise des Algorithmus Einfluß nehmen. Die Anzahl der Lösungen wird im Feld „Zähler" angezeigt

Rätsel erzeugen:
Die aktuelle Vorlage (das sind die Zahlen mit rotem Hintergrund) wird zu einem Rätsel **mit genau einer Lösung** ergänzt (nur dann ist es ein „echtes" Sudoku-Rätsel). Die Anzahl der vorgegebenen Zahlen des erzeugten Rätsels ist noch nicht minimal. Dieser Algorithmus ist bei der Konstruktion eigener Sudokus sehr nützlich.

Ein Feld weniger

Das Rätsel wird daraufhin analysiert, ob es möglich ist, eine Zahl der Vorlage wegzulassen (also den Schwierigkeitsgrad zu erhöhen). Wenn dies möglich ist, wird eine Zahl der Vorlage gestrichen und das neue – immer noch eindeutig lösbare Rätsel – wird im Spielfeld angezeigt.
Diese Operation kann mehrfach durchgeführt werden. Man kann aber auch per Hand eine Zahl der Vorgabe streichen und mit dem Befehl „Rätsel lösen“ prüfen, ob das Rätsel dann immer noch funktioniert, oder mehrere Lösungen hat.

Testen, Setzen, Zurücknehmen

Die angezeigten Zahlen erlauben Rückschlüsse auf den Schwierigkeitsgrad eines Sudoku-,Rätsels. Die genaue Bedeutung dieser Anzeigen muß man nicht kennen, um das Programm zu bedienen. Wenn Sie das Programm zunächst „nur als Werkzeug“ für mathematische Untersuchungen verwenden wollen, können Sie diese Seite überspringen.

Wenn man sich jedoch für die Funktion des Suchalgorithmus interessiert und die möglichen Variationen untersuchen will, ist es gut, die Bedeutung dieser Anzeigen zu kennen.

Die Arbeitsweise des Backtrack-Algorithmus

ist im Grunde dieselbe wie bei einem <u>systematisch probierenden</u> Menschen. In diese Phase kommt man beim Lösen eines Sudoku-Rätsels natürlich nicht so gerne, besser ist es, wenn man durch Strukturüberlegungen viel ausschließen kann. Dem Computer ist es allerdings „egal“, denn er kennt keine „Unlustgefühle“.

Da diese Art des systematischen Probierens für eine Unzahl kombinatorischer Probleme eingesetzt werden kann, kommt ihr eine große Bedeutung zu. Deshalb wird diese Methode am Beispiel eines Mini-Sudokus hier erläutert.
Das Rätsel kann in das Programm eingegeben werden. Dann können die folgenden Erläuterungen am Bildschirm verfolgt werden. Wir beginnen mit dem Feld links oben.

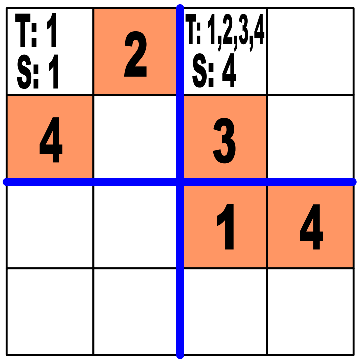


Bild 1

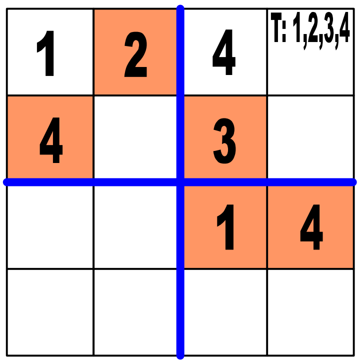


Bild 2

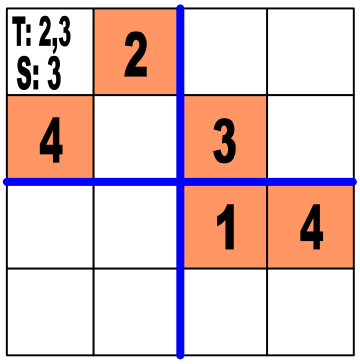


Bild 3

<u>Bild1:</u> Die Zahl 1 wird als Belegung für das Startfeld getestet (**T1**). Da sie keine Konflikte erzeugt, wird sie auch gesetzt (**S1**). Dann geht man über zum zweiten freien Feld. Zunächst wird wieder die Zahl 1 getestet (**T1**, der Mensch erfaßt mit einem Blick, daß „1“ nicht möglich ist, bei ihm läuft dieser Test fast unbewußt, <u>aber es ist ein Test</u>). Darauf folgen (**T2**), (**T3**), (**T4**) und schließlich (**S4**), denn 4 ist die erste Zahl, die man setzen kann.

<u>Bild 2:</u> Die beiden ersten Felder sind nun mit 1 und 4 belegt. Alle vier Tests (**T1,...4**) für das Feld oben rechts gehen negativ aus. Keine der Zahlen kann gesetzt werden. <u>Also muß vorher schon ein Fehler gemacht worden sein</u>

.

<u>Bild 3:</u> Man geht nun zurück („**1. backtrack**“) und versucht an der vorangegangenen Stelle eine andere Wahl. Hier steht bereits die höchste Zahl 4, diese wird gelöscht. Man kann hier keine höhere Zahl setzen. Man macht also noch einen „**2. backtrack**“ und löscht die erste Zahl, denn diese muß schon falsch gewesen sein. Darauf folgt (**T2, T3)**. Dann wird in das Feld links oben eine 3 geschrieben (**S3**), denn dies ist die nächste höhere Zahl, die dort paßt.

<u>Bild 4:</u> Darauf hin wieder **T1,...4** für das zweite freie Feld mit der Folge **S4**. Mit **T1**, **S1** ergibt sich die 1 rechts oben. Bis hierher hat man also **16 mal getestet**, **5 mal gesetzt** und **2 mal zurückgenommen**.

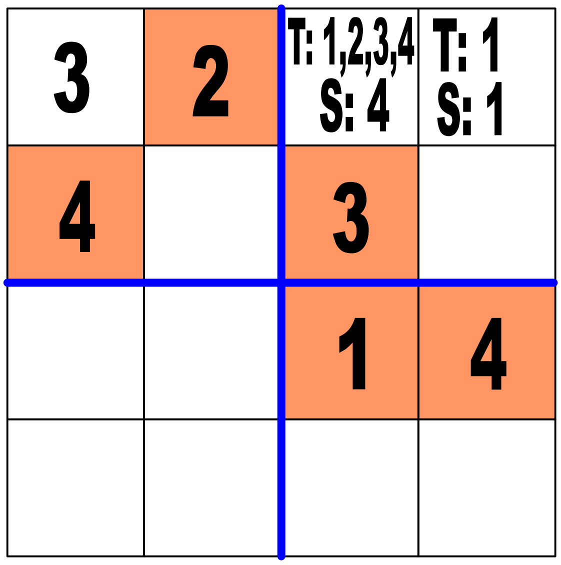


Bild 4

Von hier an füllt man das Feld ohne weiteres Backtracking aus, indem man immer die kleinste Zahl setzt, die möglich ist.

Für den menschlicher Rater wäre ein solches Vorgehen natürlich sehr stumpfsinnig und das macht – nicht ganz scherzhaft gemeint – gerade den Reiz für den Mathematiker aus. So etwas ist nämlich relativ einfach zu programmieren und funktioniert mit Sicherheit (es ist eben eine bewährte Methode).

Wenn man in der Menüzeile auf „Suchalgorithmus“ klickt, werden einige Auswahlmöglichkeiten angeboten. Hier wird die Wahl „Minimalprinzip“ erläutert: Diese ähnelt dem intelligenten Vorgehen eines denkenden Wesens schon mehr. Die Felder werden nämlich nicht einfach von links nach rechts und oben nach unten fortlaufend belegt, sondern in eine klügere Reihenfolge gebracht. **Felder, für die man viele Zahlen ausschließen kann, werden zuerst belegt**. Genauer: die Felder werden in der aufsteigenden Reihenfolge ihrer durch die Vorgabe bestimmten Freiheitsgrade belegt. Haben zwei Felder denselben Freiheitsgrad (kommen also z. B. jeweils nur 2 Zahlen in Betracht), so wird dasjenige, welches weiter oben steht (im Sinne der links/recht-oben/unten-Sortierung) zuerst genommen. Das wirkt intelligenter – und ist natürlich aufwendiger zu programmieren (dafür ist der Algorithmus aber auch schneller). Diese Wahl steht nur für das 9x9-Sudoku zur Verfügung.

Die Reihenfolge in der man die Einträge testet ist wählbar. Dies kann über das Bedienfeld „Permutation“ erreicht werden. Das Programm versucht zwar stets die kleinere Zahl zuerst zu setzen, aber man kann die Zahlen in der Vorgabe permutieren und so denselben Effekt erzielen, als würde man die Reihenfolge der eingetragenen Zahlen permutieren.

Weiterhin kann man sich überlegen, daß **Zeilen- und Spaltentauschoperationen** ebenfalls Einfluß auf die Laufzeit des Suchalgorithmus nehmen (die Rätselvorgabe bleibt zwar im wesentlichen von der gleichen Gestalt, aber die Bearbeitung der Felder mit der gleichen Anzahl von Freiheitsgraden wird in eine andere Reihenfolge gebracht).

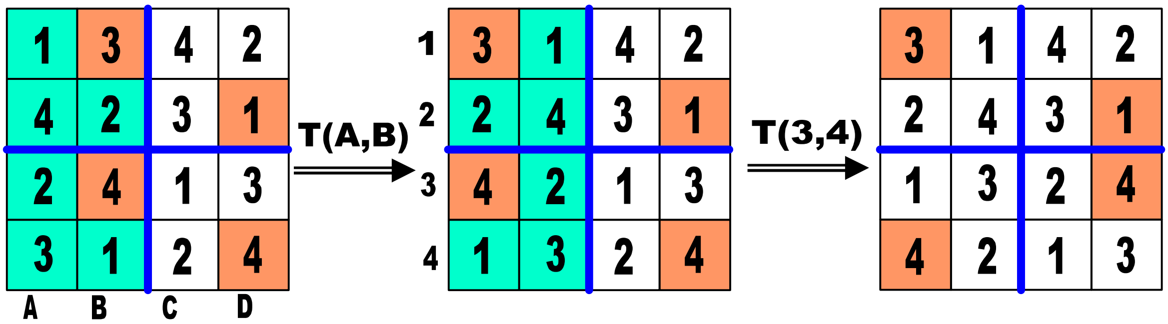
Man kann mit diesen Werkzeugen also den Backtrack-Algorithmus optimieren. Das ist für die Analyse von Programmierverfahren interessant.

4.4 Spielvorgabe ‚per Hand' bearbeiten

Zufall

Das Programm erzeugt ein Zufallsmuster von Vorgaben, rechts neben der Befehlsschaltfläche kann deren Anzahl gewählt werden. Diese Vorgaben **bilden noch kein funktionierendes Sudoku-Rätsel** (kann aber dazu gemacht werden, s. 4.3). Man kann dieses Zufallsmuster auch per Hand weiter bearbeiten.

Tausche Block, Tausche Z/Sp



Die Bildfolge zeigt die Transformation eines Mini-Sudoku-Quadrats in ein gleichwertiges. Zunächst werden die beiden grün markierten Spalten A und B vertauscht, danach die beiden unteren Zeilen 3 und 4.

Im Programm markiert man die Zeilen bzw. Spalten durch das Anklicken der check-Boxen. Entsprechendes funktioniert auch für 9x9-Sudokus.

Neben diesen Vertauschungen die nicht über die Grenzen der Unterquadrate hinausführen, kann man natürlich auch noch den oberen „Zweierstreifen" mit dem unteren „Zweierstreifen" vertauschen und entsprechend mit den Spalten verfahren.

Diese „Blocktauschoperation" wird vom Programm für das 9x9-Sudoku angeboten. Für das Mini-Sudoku kann man diese durch das zweimalige Vertauschen von zwei Zeilen oder Spalten durchführen.

Durch Vertauschungen dieser Art kann ein Sudoku-Rätsel in ganz unterschiedlich aussehende weitere Sudoku-Rätsel transformiert werden.

Gruppentafel

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
4	5	6	7	8

Tafel 1

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
3	4	1	2	3
2	3	4	1	2
4	1	2	3	4

Tafel 2

	1	2	3	4
1	4	3	2	1
3	2	1	4	3
2	3	4	1	2
4	1	2	3	4

Tafel 3

Tafel 1 ist eine Additionstafel. In den Zellen steht die Summe der „Randzahlen“. Für Tafel 2 wurde auch addiert. Ergebnisse über 4 wurden allerdings um 4 vermindert. So erreicht man, daß die Ergebnisse wieder zwischen 1 bis 4 liegen (die grau hinterlegte 1 in Tafel 2 ergibt sich so: 3+2 = 5 und 5-4=1). Man nennt diese spezielle Art der Addition „Addition modulo 4“.

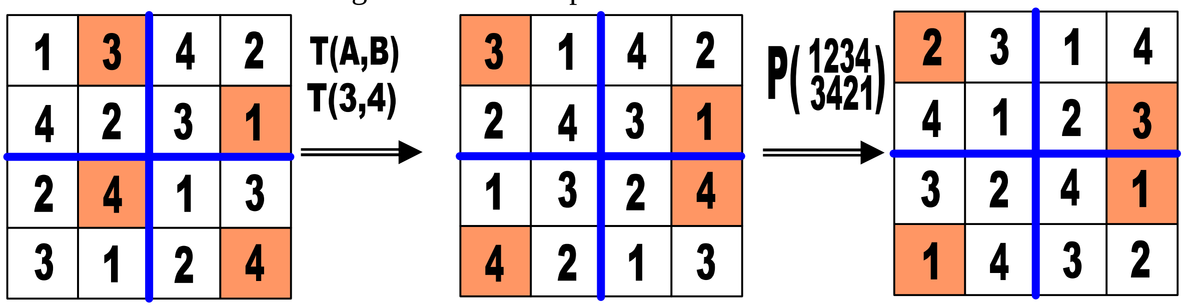
Tafel 2 ist aber nicht nur eine Additionstafel modulo 4 sondern gleichzeitig ein Sudoku-Quadrat, das allein durch die Randzahlen bestimmt wird.

Für Tafel 3 wurde eine andere spezielle Art der Addition verwendet (Kleinsche Vierergruppe, s. Kapitel 2.3). Auch diese erzeugt bei der gewählten Randbelegung ein Sudoku-Quadrat. Auf entsprechende Art und Weise lassen sich auch Sudokus in Normalgröße erzeugen.

Mehr hierzu findet man im Kapitel „Sudoku und Mathematik“.

4.5 Permutation

Der erste Übergang des links stehenden Sudoku-Quadrats zum mittleren wurde schon beschrieben. Er entsteht durch gewisse Tauschoperationen.



Der zweite Übergang entsteht dadurch, daß man überall dort, wo im mittleren Quadrat eine 1 steht eine 3 hinschreibt. Entsprechend wird 2 durch 4 ersetzt, 3 durch 2 und 4 durch 1. Man nennt eine solche Abbildung eine Permutation. Man kann Permutationen im Programm definieren, indem man die Tauschzahl unter die Ausgangszahl zieht. Ein Druck auf die Befehlsschaltfläche „Zahlen tauschen“ führt die Operation aus.

Durch die Hintereinandersetzung von Tauschoperationen und Permutationen kann man aus einem Sudoku-Rätsel ganz anders aussehende weitere Sudoku-Rätsel ableiten. Es ist eine interessante Frage, wie man umgekehrt zwei vorgelegten Sudoku-Rätseln mit gleich vielen Vorgabefeldern ansehen kann, ob sie auf diese Art miteinander „verwandt“ sind oder nicht.

4.6 Zur Installation

Die Installation über setup.exe dient der Bequemlichkeit. So werden automatisch Ordner für das Programm und die Rätselvorgaben angelegt. Außerdem wird sichergestellt, daß die nötigen Programmbibliotheken und Steuerelemente auf dem Rechner vorhanden sind. Dieses Vorgehen ist daher empfehlenswert. Man kann das Programm über die Systemsteuerung ebenso bequem wieder deinstallieren. Der Speicherbedarf für das Programm ist minimal (unter 1MB).

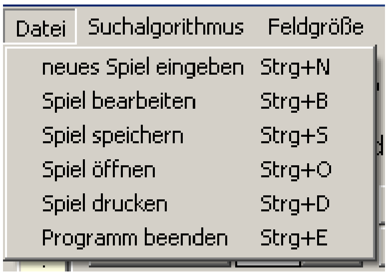
Für Minimalisten, die am liebsten alles selbst machen:

Das Programm kann auch ohne Installation durch einen einfachen Doppelklick auf SuMa.exe gestartet werden.

In ganz seltenen Fällen könnte das System bei diesem Vorgehen das Nichtvorhandensein zweier Systemdateien mit Steuerelementen monieren. Diese befinden sich auch auf der Installations-CD und können einfach per Hand in den Ordner C:/WINDOWS/SYSTEM kopiert werden.

4.7 Die Menüleiste

Datei



Der Befehl „**neues Spiel eingeben**“ löscht das aktuelle Spiel. Man kann in die Felder beliebige Vorgaben eintippen und ausprobieren. „**Spiel speichern**“ speichert Spielvorgaben bzw. den momentanen Bearbeitungszustand eines Sudokus. „**Spiel öffnen**“ liest ein Sudoku vom Datenträger ein. Mit „**Spiel drucken**“ kann man sich ein Sudoku mit oder ohne Ratefelder ausdrucken lassen.

Suchalgorithmus

Hier werden Randbedingungen für den Backtrack-Algorithmus festgelegt.

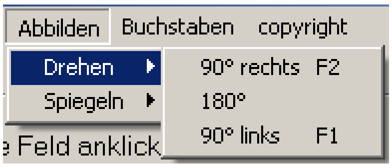
Feldgröße

Vier verschiedene Feldgrößen bzw. –unterteilungen stehen zur Verfügung.

Additionsgruppe

Diese Auswahl ist nur für Summen-Sudokus interessant. Auf das normale Spiel hat sie gar keine Auswirkung.

Abbilden



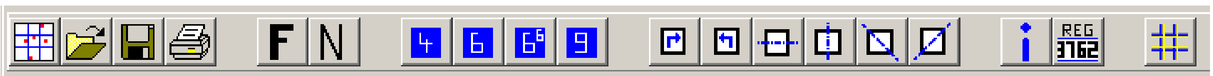
Hier werden Werkzeuge zum Drehen und Spiegeln von Sudoku-Rätseln angeboten. Das kann bei der Konstruktion eigener Sudokus hilfreich sein und es kann mathematische Strukturanalysen erleichtern.

Format

Ratefelder fett: Ratezahlen fett darstellen

Ratefelder normal: Ratezahlen normal darstellen

Die wichtigsten Befehle der Menüleiste kann man auch in der **Symbolleiste** anklicken.



Durch einen Doppelklick auf eine freie Stelle dieser Leiste öffnet sich ein Fenster zur individuellen Umgestaltung dieser Leiste.