Das Heureka-Prinzip der Förderung von mathematisch besonders begabten Mittelstufenschülern

Karl Kießwetter, Ahrensburg, Hartmut Rehlich, Hamburg

1 Grundlegende Ideen unseres Förderkonzepts

Das Hamburger Modell für Begabungsforschung und Begabtenförderung im Bereich der Mathematik existiert seit 1982 und erfreut sich eines großen Zulaufs von Schülern aus dem Großraum Hamburg. Zur Aufnahmetestung kamen auch in diesem Jahr weit über 200 Sechskläßler, - es waren ziemlich genau 250, - von denen dann wie bislang etwa 40 die Aufnahme in die Förderung angeboten wurde.

Unser Förderkonzept orientiert sich weitgehend an dem, was sich in der eigentlichen Mathematik abspielt. Und dort herrscht eine hochkomplexe Vernetztheit. Mathematik ist keine Summation über Einzelprobleme und deren Lösungen. Und schon gar nicht ist Mathematik eine Summation von Wissenspaketchen. Eigentliche Mathematik ist vielmehr ein produzierender kreativer Prozeß, bei dem aus Wissen neues Wissen entsteht und bei dem das Problemlösen weitgehend offenen Charakter hat - auch hinsichtlich bewußter leichter Abänderungen der Problemstellung während des Lösungsprozesses - und nicht nur in dieser Hinsicht eingebunden ist in umfassende und hochkomplexe Theoriebildungsprozesse. Dabei bewegt man sich, so man einen Sinn dafür hat, in Problemfeldern, also in einem Gefüge aus mehr oder minder ähnlichen Problemen – dies bezüglich der Vorgaben, Anforderungen und Aussagen in diesen Problemen, aber auch bezüglich der dafür verwendeten oder verwendbaren Lösungsstrukturen.

Für die Darstellung gewisser Aspekte der Komplexität von Problemfeldern benutzen wir die Bezeichnung bzw. Begrifflichkeit „Dimensionen der Veränderung, im Speziellen: Dimensionen der Verallgemeinerung“. Problemfelder werden in gewisser Analogie zum n-dimensionalen Raum durch diese besondere Art von inhaltlich orientierten Dimensionen aufgespannt und durchschaubarer gestaltet. Angemerkt sei hier, daß es sich dabei um eine „n-dimensionale Linearisierung“, also insbesondere um eine der üblichen, simplifizierenden Modellierungen handelt – der Beschränktheit des menschlichen Arbeitsgedächtnis angemessen und deshalb hilfreich, jedoch auch stets mit der Gefahr verfälschender Vereinfachung verbunden, was man sich stets bei derartiger unverzichtbarer Wissenschaftlichkeit vor Augen halten sollte.

Wir helfen unseren Teilnehmern natürlich auch dabei, in allgemeinmenschlicher Hinsicht zu reifen. Unser die meiste Zeit beanspruchendes Anliegen ist jedoch, diese bei ihrer mathematikbezogenen Reifprozessen zu unterstützen – hin und wieder auch im Sinne von Führen, jedoch vor allem, und dies u. a. in Erinnerung an Theodor Litt, im Sinne von Wachsenlassen, wofür dann möglichst optimale und insbesondere anregende Umgebungen und Anbindungsmöglichkeiten geschaffen werden, auch durch die Materialienvorgabe.

Wie weit Jugendliche in ihrem mathematischen Reifungsprozeß gediehen sind, sieht man vor allem daran, mit wieviel und mit welcher Art von Komplexität sie umgehen können. Und dabei tun sie sich auch im Oberstufenalter noch sehr schwer. In der Grundschule muß Komplexität auf ganz wenige Dimensionen beschränkt werden. In der Mittelstufe versuchen wir dann immer wieder, durch geeignete Materialienvorgabe mehrdimensionales Agieren in Problemfeldern zu provozieren. Dabei sehen unsere Teilnehmer zwar stets einige Abänderungs- und Verallgemeinerungsdimensionen, sind aber in der Regel sehr unbeholfen, wenn es darum geht, sich selbstkritisch und auf korrekte Weise mathematikproduzierend längs dieser Dimensionen ins Problemfeld hinein und dort weiter zu hangeln. Es fehlt u.a. weitgehend etwas, das man als routinierte Grundsolidität bezeichnen könnte und das die Schule heute offensichtlich weniger als früher mitliefert.

1985 hatten wir etwas Geld für den Versuch, Schüler, welche nicht in unseren Fördergruppen betreut werden konnten, durch schriftliches Material zu einem selbständigen mathematischen Arbeiten in unserem Sinne zu bringen. Es entstanden dafür 5 sogenannte Heureka-Hefte, die wir dann trotz einiger Bedenken nach einem einfachen und linearen Prinzip gestalteten (eine Linearisierung war insbesondere auch durch das Hintereinanderschreibenmüssen unverrückbar vorgegeben). Dieses Prinzip konkretisierte sich bei jedem Material in 3 Stationen der folgenden Art:

Station I: Es wird eine einfache und eng gefaßte Eingangsaufgabe vorgegeben, bei der erwartet werden kann, daß sie relativ schnell gelöst wird (Erfolgserlebnis!) und daß auch die teilnehmenden Schüler bald Anschluß- und Erweiterungsaufgaben sehen und formulieren können. Die Teilnehmer bekommen hinreichend Zeit, die Aufgabe zu bearbeiten.

Station II: Die Eingangsaufgabe wird sehr genau besprochen. Dabei wird insbesondere darauf geachtet, daß Strukturen, insbesondere Lösungsstrukturen, welche bei den Anschluß- und Erweiterungsaufgaben wichtig werden können, verständlich dargestellt werden. Danach werden Fortsetzungsmöglichkeiten in den Problemraum hinein, u.a. mögliche Anschluß- und Erweiterungsaufgaben bzw. Dimensionen der Veränderung und Verallgemeinerung, von den Teilnehmern assoziiert und gemeinsam aufgelistet.

Station III: Es wird den Teilnehmern hinreichend viel Zeit für selbstbestimmte und selbständige Arbeit im Problemfeld gegeben. Zum Abschluß der Sitzung werden Ergebnisse dieser Arbeit vorgestellt und kritisch eingeordnet. Für diese kritische Einordnung werden sachlich-inhaltliche Aspekte bemüht und personenbezogene Bewertungen konsequent weggelassen.

2 Die Realisierung im Beispielmaterial „Halbierbare Sequenzen“

Station I:

Das Aufgabenblatt (für Dreizehn- bis Achtzehnjährige):

---

1 + 2 = 3

Diese einfache Rechnung hat eine bemerkenswerte Besonderheit: 1, 2 und 3 sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die durch das Gleichheitszeichen in zwei summengleiche Abschnitte aufgeteilt werden. Durch Probieren findet man leicht ein Beispiel mit 5 Zahlen:

4 + 5 + 6 = 7 + 8.

Es fällt auf, daß dieses Beispiel mit der 4 beginnt und nahtlos an die Rechnung 1+ 2 = 3 anschließt.

Deine Aufgaben:

1. Erkunde, ob sich das Muster „bis ins Unendliche“ fortsetzen läßt.
2. Kann man auch mit der 2 anfangen?
3. Notiere, was Dir weiter auffällt und formuliere Anschlußfragen.

Zu Aufgabe 1:

Eine Fortsetzung des Musters kann intuitiv (erst 3 Zahlen, dann 5 Zahlen, dann also 7 Zahlen) oder durch Probieren schnell gefunden werden:

$\boxed{\mathbf{1}+2 = 3}$, $\boxed{\mathbf{4}+5+6 = 7+8}$, $\boxed{\mathbf{9}+10+11+12 = 13+14+15}$, $\boxed{\mathbf{16}+17+18+19+20 = \ldots}$

Wir nennen im Folgenden solche Ausschnitte aus der Folge der natürlichen Zahlen „halbierbare Sequenzen“. Bei der Arbeit in unseren Fördergruppen treten oft spontan – und zur Erleichterung der Verständigung – neue Begriffsbildungen auf. Werden diese von der Mehrheit als treffend und nützlich empfunden, verbreiten sie sich schnell und werden zum gruppeninternen Allgemeingut. Die folgenden Gestaltmerkmale in dieser Serie halbierbarer Sequenzen werden in der Regel schnell gesehen und als Hypothesen für den Fortgang der Serie formuliert:

◦ Sowohl die Anzahl der Zahlen links vom Gleichheitszeichen, als auch die Anzahl der Zahlen rechts vom Gleichheitszeichen wächst von halbierbarer Sequenz zu halbierbarer Sequenz um eins.

◦ Bei jeder Quadratzahl – und nur da – beginnt eine halbierbare Sequenz, bei der links eine Zahl mehr als rechts steht.

◦ Links vom Gleichheitszeichen stehen stets Zahlen der Form $n \cdot (n+1)$, also sogenannte Heteromeken.

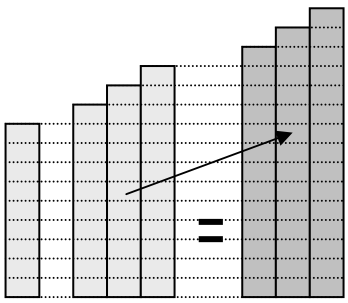
◦ Die Folge der Anzahl der Zahlen in den halbierbaren Sequenzen beginnt mit 3, 5, 7, 9 (und somit beginnen die halbierbaren Sequenzen bei Quadratzahlen, denn 1 + 3 + 5 + ... = Quadratzahl).

Die Arbeit konzentriert sich dann bald auf die Begründung dieser und weiterer Hypothesen (die Formulierung „bis ins Unendliche“ innerhalb der ersten Fragestellung zielt ja auch ausdrücklich darauf). Durch die zweite Fragestellung wird angeregt, die Begründungsmuster auf ihre Verallgemeinerbarkeit hin abzuklopfen.

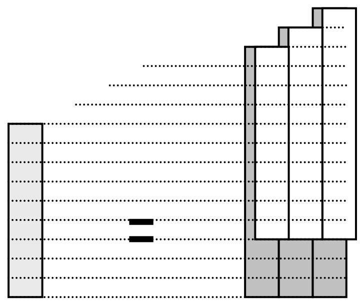
Station IIa – die Besprechung der Eingangsaufgaben:

Es gibt sehr unterschiedliche Begründungen für die genannten Strukturen der halbierbaren Sequenzen. Das Spektrum reicht von Gleichungsansätzen über geometrische Begründungen bis zu ikonisch repräsentierten Gestalteinsichten. Diese stehen gleichberechtigt nebeneinander. Bei der Besprechung der Eingangsaufgabe werden sehr sorgfältig die verschiedenen Begründungsansätze (diese korrespondieren in der Regel mit den mathematischen Vorlieben bzw. dem „mathematischen Typ“ des Bearbeiters) betrachtet und korrekt ausformuliert. Um das mögliche Spektrum anzudeuten, werden vier verschiedene Ansätze kurz skizziert:

a) Eine geometrische Begründung



9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15



rechts bleibt (immer!) ein Quadrat übrig!

Die Startzahl muß den Überhang des rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Treppenabschnitts über den gleichbreiten niedrigeren Treppenabschnitt links vom Gleichheitszeichen kompensieren. Man kann den linken Treppenabschnitt in Gedanken auf den rechten schieben und sieht, daß der Überhang offensichtlich ein Quadrat ist.

b) Strukturell gleichwertig mit dieser geometrischen Darstellung ist das arithmetische Subtraktionsmuster:

9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 9 = (15-12) + (14-11) + (13-10)

Differenz jeweils 3 9 = 3 mal 3

Dieses Beispiel ist – ebenso wie die geometrische Darstellung - in dem Sinne paradigmatisch, daß der allgemeine Fall durchscheint und mitbewiesen wird: Startet man bei einer Quadratzahl q^2, so ist die Summe der natürlichen Zahlen von q^2 bis $q^2 + q$ gleich der Summe der natürlichen Zahlen von $q^2 + q + 1$ bis $q^2 + 2q$. Die dann folgende Zahl ist $q^2 + 2q + 1$ und das ist die nächste Quadratzahl (damit ist das nahtlose Aneinanderkleben dieser Serie halbierbarer Sequenzen gleich mitbewiesen).

c) Natürlich kann – bei entsprechender Routine – auch mit Summenformeln gearbeitet werden:

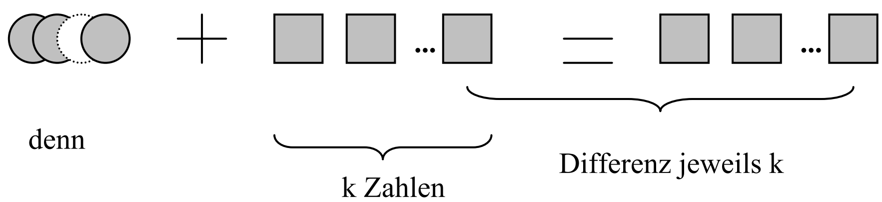
$$\begin{aligned}
\sum_{i=n}^{n+k} i &= \sum_{i=n+k+1}^{n+2k} i \\
[n+(n+k)]\cdot(k+1) &= [(n+k+1)+(n+2k)]\cdot k \\
2nk+2n+k^2+k &= 2nk+3k^2+k \\
n &= k^2
\end{aligned}$$

Alle Umformungen sind Äquivalenzumformungen und man sieht sofort, daß genau bei den Quadratzahlen derartige Sequenzen beginnen. Man kann – indem man die Obergrenze der zweiten Summe variabel hält, so auch allgemeinere Ergebnisse produzieren.

Es gibt eine gewisse „schulmeisterliche Tradition“, solche eher kalkülorientierten Bearbeitungsmöglichkeiten den Lernenden aufzudrängen, die wir nicht gutheißen. Abgesehen davon, daß den Lernenden oft zu wenig Zeit gelassen wird, die nötige Routine von sich aus zu entwickeln, werden derartige "ökonomisch optimierte und normierte" Darstellungen auch bei originärer mathematischer Arbeit von Fachleuten oft erst *am Ende* eines Bearbeitungsprozesses – der ganz anders ablief – aufgeschrieben. *Innerhalb* eines solchen Prozesses kann ein Zuviel an eingefordertem Formalismus sogar den Blick auf weitere Zusammenhänge verstellen. Die folgende - eher ikonische Darstellung – fußt nicht nur auf analogen Denk- und Umformungsschritten (die in der algebraischen Darstellung eher versteckt ablaufen) und zeigt diese in größerer Klarheit, sie ist sogar in dem Sinne besser, daß sie eine wesentliche Verallgemeinerungsdimension gleich mitliefert (wie die geometrische und arithmetische Repräsentation es ja auch tun, am schlechtesten tut es die algebraische).

d) Eine Bearbeitung, die eine ikonische Repräsentation benutzt.

„Vorspann“: Summe k^2,



Diese Begründung ist auch ohne algebraische Umformungsfertigkeiten zu verstehen und unter heuristischen Gesichtspunkten sogar vorzuziehen. So etwas wie „der eigentliche Grund“ für das Auftreten der Quadratzahlen wird bildhaft deutlich. Darüber hinaus wird auch sofort erkennbar, daß es gar keine Rolle spielt, ob links eine, zwei oder drei Zahlen mehr als rechts stehen. Die Darstellung führt also zwanglos zu einer Verallgemeinerung der Einsicht: Die Summe des "Vorspanns" muß immer eine Quadratzahl sein, ganz gleich, wie viele Zahlen den "Vorspann" bilden. Darstellungen dieser Art entwickeln sich oft auf spielerische Weise und man sollte dieses Spiel durch formales "Perfektionsstreben" nicht abblocken. Gerd Binnig, Physik-Nobelpreisträger von 1986 beklagt in seinem Buch „Aus dem Nichts – Über die Kreativität von Natur und Mensch (1989, München)“, daß *üblicherweise bei der Lehre die Kreativität zu kurz* kam und *daß das spielerische Umgehen mit dem Stoff kaum eine Rolle* spielte. Die in der ikonischen Darstellung gewonnene Einsicht kann später dazu führen, einen entsprechenden algebraischen Nachweis zu suchen. Im günstigsten Fall ergibt sich ein Wechsel zwischen eher spielerisch kreativen Phasen und Absicherungsbemühungen. Die Sicherung der Ergebnisse muß aber nicht in der vorgestellten Gleichungsform geschehen. Andere, z.B. "textlastige" Begründungen, die auf wirkliche Einsicht deuten, sind wesentlich wertvoller als aufgezwungene fremdbestimmte Beweismuster, die der Lernende von sich aus oftmals ohnehin nicht produzieren kann.

Bei der Besprechung der Eingangsaufgaben ergibt sich eine Öffnung des Problemfeldes in verschiedene, nahezu beliebig kombinierbare Richtungen, die wir als „Dimensionen der Veränderung bzw. Verallgemeinerung“ bezeichnen. Es wurde versucht zu zeigen, daß bei der Besprechung der Eingangsaufgaben vor allem auch Wert darauf gelegt wird, ein möglichst breites Spektrum an Denkwegen unserer Teilnehmer aufzugreifen und zu vertiefen.

Unterschiedliche Denkansätze führen vor allem auch zu verschiedenen Verallgemeinerungsdimensionen.

Station IIb – Dimensionen der Veränderung und Verallgemeinerung:

a) Bei der Eingangsaufgabe steht links vom Gleichheitszeichen eine Zahl mehr als rechts. Man kann fragen, ob dort auch k = 2, 3, 4 usw. Zahlen mehr als rechts stehen können. Die folgende Tabelle gibt weitere Anregungen zur Mustersuche und Hypothesenbildung. Die Eingangsaufgabe bezieht sich auf die erste Zeile. Zur Erklärung der Tabelle: Die Zahlen zwischen zwei eingerahmten Abschnitten haben dieselbe Summe wie die Zahlen im eingerahmten Abschnitt rechts von ihnen, der „quadratische Vorlauf" ist durch Fettdruck hervorgehoben; Beispiel in der dritten Zeile: **2+3+4** = 9, 2+3+4+5+6+7 = $\boxed{8+9+10}$.

1 2 $\boxed{3}$ **4** 5 6 $\boxed{7\ 8}$ **9** 10 11 12 $\boxed{13\ 14\ 15}$ **16** 17 18 19 20 $\boxed{21\ 22\ 23\ 24}$ 25 26 27

0 1 2 $\boxed{3}$ **4 5** 6 7 8 $\boxed{9\ 10\ 11}$ **12 13** 14 15 16 17 18 $\boxed{19\ 20\ 21\ 22\ 23}$ **24 25** 26

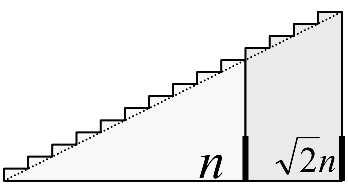
2 3 4 5 6 7 $\boxed{8\ 9\ 10}$ **11 12 13** 14 15 16 17 18 19 $\boxed{20\ 21\ 22\ 23\ 24\ 25}$ 26 27

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 $\boxed{13\ 14\ 15\ 16\ 17}$ **18 19 20 21 22** 23 24 25 26 27

Die halbierbaren Sequenzen für längere Vorspanne schließen wieder nahtlos aneinander an. Man findet keine halbierbaren Sequenzen, bei denen links vier Zahlen mehr als rechts stehen (vierte Zeile). Man kann beweisen, daß es keine gibt.

b) Man kann die Sequenzen anders sortieren, zum Beispiel nicht nach der *Differenz* der Anzahlen der Zahlen im linken und rechten Abschnitt, sondern nach deren *Verhältnis*. Fragt man dagegen nach allen halbierbaren Sequenzen, die bei einer bestimmten Startzahl beginnen, gelangt man zur Pellschen Gleichung: Im Fall Startzahl = 1 findet man unendlich viele Lösungen und Verbindungen zur Approximation der Wurzel aus 2.



Dieser Zusammenhang kann "intuitiv visuell" gefunden werden, indem man die "Summentreppe" als Dreieck vereinfacht (für große Zahlen fällt die Stufigkeit immer weniger ins Gewicht).

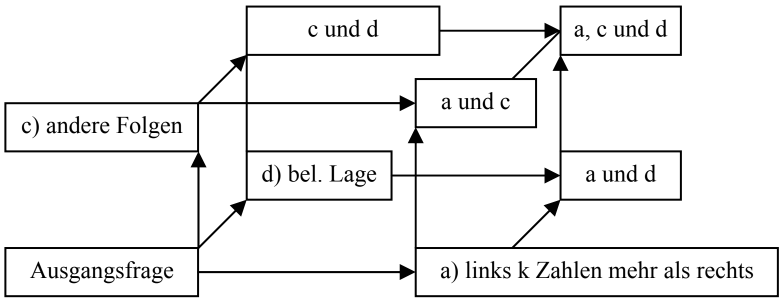
Man sieht, daß das große Dreieck zweimal die Größe des kleinen Dreiecks haben muß, wenn die Teilflächen gleich sein sollen. Das große Dreieck erhält man folglich durch eine Streckung mit dem Faktor $\sqrt{2}$. Man kann aber auch über einen Ansatz mit der Summenformel für arithmetische Reihen zur Pellschen Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ und damit auch zur Approximation der Wurzel aus 2 gelangen.

c) Man kann von einer anderen Folge als der Folge der natürlichen Zahlen ausgehen, z. B. von der Folge der Quadratzahlen:

$3^2 + 4^2 = 5^2 \ldots \qquad 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

d) Man kann die summengleichen Abschnitte voneinander trennen. Für S = 15 findet man dann neben der schon bekannten halbierbaren Sequenz 15 = 4+5+6 = 7+8 noch die Abschnitte 15 = 15 und 15 = 1+2+3+4+5.

Alle diese Dimensionen der Veränderung sind beliebig miteinander kombinierbar (daher rührt auch die von uns gewählte Bezeichnung „Dimension").



e) Eine weitere Dimension der Veränderung erhält man, wenn man die Zahl der summengleichen Abschnitte erhöht und z. B. nach „drittelbaren" Sequenzen fragt. Man landet dann – nach einer geeigneten Transformation – bei einer zahlentheoretischen Frage, die schon Euler beschäftigt hat: Gibt es arithmetische Progressionen aus 4 Quadratzahlen (1, 25 und 49 ist z.B. eine arithmetische Progression aus drei Quadratzahlen). Dies zu zeigen, sprengt jedoch den Rahmen dieses kleinen Artikels. Weitere inhaltliche Beispiele und weitere Bemerkungen zu unserem didaktischen Konzept findet man z. B. in [1] und [2].

Station III

Bei n Dimensionen der Abänderung ergeben sich „rechnerisch“ $2^n - 1$ weitere Problemfelder. In einigen wird dann in der Regel wieder auf vielfältige individuell unterschiedliche Art weitergearbeitet. Bei einem Verallgemeinerungsstrang spielt die Frage nach Abschnitten der Folge der natürlichen Zahlen, deren Summe eine Quadratzahl ist (wie etwa 4-5 oder 18-19-20-21-22), eine entscheidende Rolle. Daß es keine vier natürlichen Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt, liegt daran, daß die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets kongruent 2 modulo 4 ist und solche Quadratzahlen gibt es nicht. Man kann sämtliche Abschnitte aus der Folge der natürlichen Zahlen, deren Summe eine Quadratzahl ist, durch eine Parameterdarstellung angeben. Damit weiß man dann aber natürlich längst nicht „alles“ über halbierbare Sequenzen (ebensowenig wie die Beschreibung aller denkbaren Dreiecke durch die Dreiecksungleichung alle Fragen über Dreiecke klärt).

Wesentliches Element dieser „Station“ ist die Förderung der Selbständigkeit unserer Teilnehmer nicht nur bei der Bearbeitung vorgegebener Fragestellungen, sondern vor allem auch bei der Formulierung eigener Fragen. Je nach Ausdauer und Motivation (und diese hängen auch vom Alter der Teilnehmer ab), kann die Arbeit in dieser Station einige Wochen oder Monate dauern (bei im Schnitt 2-3 Sitzungen pro Schulmonat).

Literatur

[1] Rehlich, H.: *Ideen zur Organisation entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht.* In: MU, Jahrgang 49, Heft 1, 2003.

[2] *Kießwetter, K., Rehlich, H.: Das Hamburger Modell der Begabungsforschung und Begabtenförderung im Bereich der Mathematik. In: MU, Jahrgang 51, Heft 5, 2005.*

Anschrift der Verfasser:

Karl Kießwetter, Stormarnstraße 71a, 22926 Ahrensburg

Hartmut Rehlich, Am Internationalen Seegerichtshof 10, 22609 Hamburg