Das Hamburger Modell der Begabungsforschung und Begabtenförderung im Bereich der Mathematik

von Karl Kießwetter und Hartmut Rehlich

Ab Wintersemester 1981/82 arbeitet ein interdisziplinär zusammengesetztes Team aus Mitgliedern der Fachbereiche Psychologie, Mathematik und Erziehungswissenschaft der Universität Hamburg in engem Kontakt zu einer Arbeitsgruppe der Johns-Hopkins-University in Baltimore/USA an der Konzeption und Durchführung eines Forschungs- und Förderprojekts für Schüler und Schülerinnen des Sekundarstufenbereichs.

In Hamburg und Baltimore sind das Eintrittsalter (Testung am Ende der Klasse 6) und die Verwendung des in Baltimore schon länger erprobten Tests SAT-M (Scholastic Aptitude Test Mathematics) gleich. Bei diesem Test wird ein 12-Jähriger als mathematisch hochbegabt eingestuft, wenn er etwas besser als der Durchschnitt der 16-Jährigen abschneidet. In Baltimore ist das primäre Ziel, dass Hochbegabte schneller die Schule durchlaufen. In einem gewissen Gegensatz dazu steht in Hamburg die Konzentration auf die kreative Komponente und auf das Fertigwerden mit hoher Komplexität bei einer möglichst selbständigen Betätigung im Bereich der Mathematik sowohl beim Förderkonzept als auch bei der Entwicklung eines eigenen zusätzlichen Tests.

In den Schuljahren 83/84, 84/85 und 85/86 wird das von der Müller-Reitz-Stiftung im Stifterverband und dem Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft für 3 Jahre finanzierte Forschungsprojekt „Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern“ durchgeführt. Am Ende beteiligen sich etwa 100 Schüler, darunter knapp 30% Mädchen, in drei Jahrgangsgruppen (83, 84 und 85) an den pro Jahr ca. 24mal an Samstagvormittagen in den Räumen der Universität Hamburg stattfindenden etwa dreistündigen Förderveranstaltungen. Und fast alle Teilnehmer wollen weitermachen.

1985/86 wird die gemeinnützige William-Stern-Gesellschaft für Begabungsforschung und Begabtenförderung gegründet, insbesondere auch, um dieses Weitermachen zu ermöglichen. Zusätzlich wird eine „Oberstufengruppe“ vorgesehen, in der sich diejenigen Schüler wiederfinden, welche auch im 4. Jahr und später an Förderveranstaltungen teilnehmen wollen.

Ab 1986/87 und bis heute ist die William-Stern-Gesellschaft Träger des Hamburger Modells der Begabungsforschung und Begabtenförderung im Bereich der Mathematik. Die Finanzierung der Förderveranstaltungen, der Testungen usw. erfolgt seither vornehmlich durch freiwillige Elternbeiträge, in den letzten Jahren aber zum Teil auch durch Spenden eines Hamburger Rotary-Clubs. Ganz wesentlich ist darüber hinaus, dass die Räumlichkeiten der Universität genutzt werden können und dass viel ehrenamtliche Arbeit eingebracht wird.

Die etwa 3-stündigen Förderveranstaltungen finden weiter an Sonnabenden von ca. 9.30 Uhr bis ca. 12.30 Uhr statt. Es gibt 3 Mittelstufengruppen (Klassenstufen 7, 8 und 9) und eine „Oberstufengruppe“ (Klassenstufe 10 und älter). Die in über etwa 20 Jahren erfahrenen „statistisch-durchschnittlichen“ Gruppengrößen sind gegen Ende des jeweiligen Schuljahres

38 (Klassenst.7) , 33 (Klassenst.8) , 28 (Klassenst.9) und 29 (Oberstufengruppe).

Dies bedeutet z. B., dass von den unmittelbar nach der Testung Eingeladenen jeweils etwa 45 Schülern am Ende des 2. Jahres noch 74% und am Ende des 3. Jahres noch 61% dabei sind.

Das Betreuerteam setzt sich zu etwa 70% aus Ehemaligen zusammen. Ehemalige, die auch im zwischenmenschlichen Bereich ganz besonders qualifiziert sind, als Betreuer/Tutoren anzuwerben und einzusetzen, hat sich enorm bewährt.
Im Rahmen einer psychologischen Doktorarbeit fanden ausführliche Interviews mit unseren ersten drei Jahrgangsgruppen statt. Dabei trat ein über die mathematische Betätigung im engeren Sinne hinausgehender Aspekt besonders hervor, der nicht wichtig genug genommen werden kann, nämlich die Möglichkeit des Kontaktes zu ähnlich begabten und interessierten Schülern sowie die Zusammenarbeit an anspruchsvollen mathematischen Problemen.
Bei einer späteren Befragung im Jahre 2002, und zwar der ersten fünf Jahrgänge (83 bis 87) von dann 25- bis 30-jährigen ehemaligen Teilnehmern, ergab sich u. a.:
Die meisten (85%) studierten mit der ersten Möglichkeit nach dem Abitur. Von diesen wählten ca. 50% ein mathematiknahes Fach (Mathematik, Naturwissenschaften, Ingenieurwesen), ca. 25% orientierten sich direkt in Richtung Wirtschaft, und der Rest verteilte sich auf Medizin, Psychologie, Philosophie, Geschichte, Politologie und Musik. Einen Studienabschluß hatten bis zur Befragung ca. 80% erreicht.
Rund 45% hatten die Promotion schon abgeschlossen oder waren noch dabei zu promovieren, davon 50% in einem mathematiknahen Fach.
Ca. 40% hatten ein oder zwei Semester im Ausland verbracht, ca. 24% erhielten ein Stipendium einer Stiftung, ca. 45% hatten ein oder mehrere Semester als wissenschaftliche Hilfskraft gearbeitet und ca. 25% waren an einem Forschungsprojekt beteiligt.
Die meisten erinnerten sich positiv an ihre Teilnahme an den Förderveranstaltungen im Hamburger Modell, und zwar wegen anspruchsvoller Kursarbeit (75%), gutem Arbeitsklima (70%), stimulierendem Gedankenaustausch (66%), wegen neuer Kontakte (58%), gutem sozialem Klima (47%), und wegen Anregung zu neuen Interessen (28%) und zu neuen Aktivitäten (23%).

Das Förderkonzept

Über Mathematik kursieren in unserer Gesellschaft ganz verschiedene Vorstellungen, u. a.:

1. Sammlung von Rezepten („fertige Mathematik“ in Büchern, Formeln zur Lösung von Gleichungen, statistische Verfahren zur Auswertung von Testbatterien),
2. Problemlösen bei vorgegebenen Problemen (als Förderkonzept: Aufgabenwettbewerbe wie der Bundeswettbewerb Mathematik oder wie die Mathematik-Olympiaden)
3. Mathematik ist ein kreativer Theoriebildungsprozess, bei dem neue Begriffe gestaltet und erprobt, neue Probleme formuliert, neue Repräsentationen erfunden und Beweisstrukturen auf eine Ausweitung ihres Wirkungsfeldes hin untersucht werden, bei dem also erst am Ende das steht, was man in Aufsätzen und Büchern vorfindet.

Dem Konzept unserer Förderung liegt die Vorstellung 3 zugrunde. Wir versuchen, mathematische Forschungsprozesse zu simulieren. Und gelegentlich bewegen wir uns sogar in Bereichen, wo zumindest nach unserer Kenntnis Probleme existieren und der elementarmathematischen Bearbeitung harren, welche bislang überhaupt noch nicht bearbeitet worden sind.

Bei den Mittelstufengruppen müssen wir uns mit der selbständigen Lösung von Problemen begnügen, deren einbettende Vernetzung im zugehörigen Problemfeld weniger komplex ist und die auch deshalb baldige Bearbeitungserfolge ermöglichen.
Für die Oberstufengruppe (Klassenstufe 10 und älter) wählen wir mit Vorliebe Bereiche, die auch uns Betreuern ungelöste Probleme anbieten, so dass wir zusammen mit den beteiligten Schülern unter echten Voraussetzungen in einem Selbstorganisationsprozess und gleichberechtigt an diesen Problemen arbeiten und uns die Schüler dann u. a. auch beim Scheitern und Fehlermachen erleben können, allerdings auch ein Verhalten mitbekommen, mit dem wir uns dann gemeinsam mit diesen Schülern wieder aus solchen Situationen befreien.

In der Regel wird am Anfang der Sitzung bzw. Bearbeitungszeit ein relativ einfaches Problem in einer geeigneten konkreten Situation so vorgegeben, dass sich bei der selbständigen Bearbeitung für jeden Teilnehmer bald Erfolge zeigen und sich für jemanden, der solches sehen kann, plausible Ausweitungen auf ganze Problemfelder und Theoriebereiche eröffnen.

Erstes Beispiel eines Materials für einfache elementarmathematische Theoriebildungsprozesse

Dieses Beispiel ist für eine der ersten Sitzungen der Oberstufengruppe geeignet, aber auch schon viel früher einsetzbar. Für die Oberstufengruppe könnte das Problem so formuliert werden:

Aufgabe:
Kann man aus den Steinen des üblichen 6-Dominospiels (alle Kombinationen der Zahlen von 0 bis 6) einen „totalen Dominokreis“ legen ?
Bei einem **Dominokreis** müssen die Steine nach den Dominoregeln aneinandergelegt sein; und **total** heißt ein solcher Kreis, wenn in ihm alle Steine des Spiels vorkommen.
Beantworte diese Frage auch für das übliche 9-Dominospiel (Zahlen von 0 bis 9), welches ebenfalls in jedem besseren Spielwarengeschäft erstanden werden kann.

Für Jüngere kann man zum Eindenken in die Struktur des Dominomaterials noch die folgende *Aufgabe* voranstellen:
Alle Dominosteine werden in ein Säckchen getan. Dann wird verdeckt ein Stein herausgenommen. Schließlich ist dieser Stein aus dem Rest zu bestimmen.

Didaktische Hinweise

unter der Vorgabe, dass zwar der Spaß am Entdecken immer noch und stets an erster Stelle stehen soll, dass aber trotzdem auch Begriffe, Sätze und Beweise exakt zu formulieren sind, wofür im Moment noch keine hinreichende Routine vorhanden ist:

Der Spaß am Entdecken wird hier dadurch besonders gefördert, dass mit den Spielsteinen ganz konkret herumprobiert werden kann.
In der obigen Aufgabenstellung sind (absichtlich) schon Begriffe des erwarteten Theorienetzes vorgegeben, explizit **Dominokreis** und **totaler Dominokreis** und implizit **n-Dominospiel** – dieses durch die beiden Spezialfälle 6-Dominospiel und 9-Dominospiel.

Durch den Übergang zur Variablen n erhält man unendlich viele Probleme der obigen Art, insbesondere ganze Problemklassen und dadurch automatisch Anlass zur Theoriebildung. Ein erster, derartig übergreifender Satz aus der Theorie ist deshalb dann auch schnell gefunden.
Es gibt zwei verschiedene, sich beide aufdrängende Repräsentationen – ein Sachverhalt, über dessen Vorteile man reflektieren kann und der zudem (gewünschte!) Anbindungen an die Geschichte der Mathematik provoziert (griechische Legefiguren bzw. EULERsche Linien).

Lösungswege und vernetzende Theoriebildung im Problemfeld

Hier ist leider kein Platz, alle die verschiedenen möglichen Wege und Irrwege zu beschreiben, welche beim freien Agieren von dem vorgegebenen Eingangsproblem aus gegangen werden können und dann tatsächlich auch benutzt werden. Es können nur einige wenige Stichworte zu potentiellen idealen Bearbeitungen angegeben werden. Ein erster übergreifender Satz aus der Theorie ist schnell gefunden:

Satz 1 : Für n-Dominospiele mit ungeradem n ist kein totaler Dominokreis möglich.

Der Beweis kann im Prinzip schon von Grundschülern geführt werden (solches ist schon geschehen!). Man kann im Detail z. B. so argumentieren:
Bei n = 3 gibt es genau die Steine 0--0 , 1--0 , 2--0 , 3--0 , welche die 0 enthalten. Die 0 kommt also bei dem 3-Dominospiel genau 5-mal vor. Bei einem Dominokreis müssen aber stets zwei gleiche Zahlen aneinandergelegt werden, es müsste also eine gerade Zahl von Nullen vorhanden sein.
Dieser Spezialfall ist paradigmatisch in dem Sinne, dass in ihm die Strukur der Argumentation für den allgemeinen Fall unmittelbar ablesbar ist, nämlich: In einem n-Dominospiel gibt es n+2 Nullen, also eine gerade/ungerade Zahl von Nullen genau dann, wenn n gerade/ungerade ist. Bei einem Dominokreis muss eine gerade Zahl von Nullen auftreten. Also kann kein totaler n-Dominokreis existieren, wenn n ungerade ist.

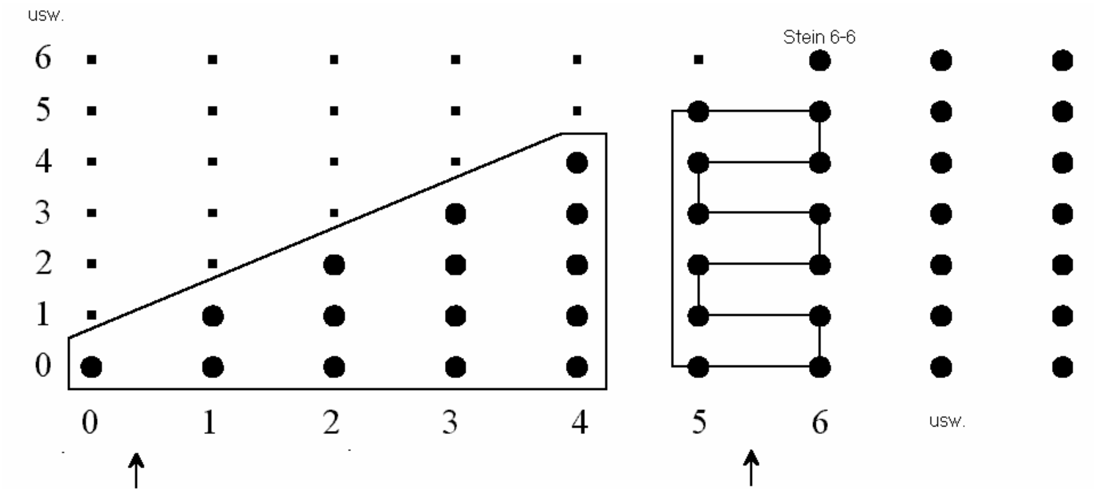
Nahe liegt jetzt ein phantasievolles Netzerweitern in den Bereich beliebiger Dominokreise hinein, etwa so: Dass die 0 nur in geradzahliger Anzahl auftreten kann, gilt für beliebige Dominokreise. Außerdem kann in der obigen Argumentation diese 0 aus „Symmetriegründen“ gegen jede weitere der dort vorkommenden Zahlen ausgetauscht werden. Für alle Dominokreise gilt deshalb, dass alle darin vorkommenden Zahlen in gerader Anzahl vorkommen. Man gewinnt daraus neue Probleme, z. B.:

Aufgabe:
Hat man eine Menge von Dominosteinen so vorgegeben, dass darin alle Zahlen geradzahlig oft vorkommen, kann man dann genau diese Steine in einem Dominokreis unterbringen?

Auch für Jugendliche naheliegend ist es, sich erst einmal mit n-Dominospielen zu befassen, bei denen n gerade ist. Sie entdecken dann bald

Satz 2: Bei jedem n-Dominospiel mit geradem n läßt sich ein totaler Dominokreis legen.

Zum Beweis kann man die auch für Schüler sofort einsichtige **Gitterpunktrepräsentation** benutzen (dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit!). Wir begnügen uns hier mit einem so wie oben ebenfalls paradigmatischen Beispiel, nämlich mit
n = 6 , und zudem mit dem Induktionsschritt 4 → 6.



Induktionsvoraussetzung:
Ein totaler 4-Dominokreis
ist möglich

Dieser Dominokreis enthält bis auf 6—6, der sicher auch eingefügt werden kann, alle Steine, bei denen die Zahlen 5 oder 6 vorkommen. Er kann als „Superstein" k—k für jedes k = 0 ...4 verwendet und deshalb sicher in den 4-Dominokreis eingefügt werden.

Die Graphentheorie stellt eine ***Repräsentation 2*** zur Verfügung (auf die man aber auch ohne graphentheoretische Kenntnisse und insbesondere solche über EULER kommen kann). Die Steine werden dabei durch Kanten in einem Graphen repräsentiert. Der Graph ist in dem Sinne (zumindest) vollständig, dass von jedem der Knotenpunkte 0 , 1 , ... bis ... n genau eine Verbindungskante zu jedem anderen Knotenpunkt hin existiert. Bei einem Dominographen gibt es dazu aber noch von jedem der Knotenpunkte aus eine Kante, die zum selben Knotenpunkt zurückführt. Unsere Suche nach einem totalen Dominokreis bedeutet in der neuen Repräsentation die Suche nach einem **EULERschen Kreis**, - das ist ein geschlossener lückenloser Kantenzug, in dem alle Kanten des Graphen genau einmal vorkommen. Darüber gilt bekanntlich:

Satz 3: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen EULERschen Kreis, wenn alle Kantenzahlen gerade sind.

Solches kann man in Büchern über Graphentheorie leicht nachlesen. Interessanter, da Neues produzierend, ist es hier, verallgemeinernd die Frage nach dem größten im n-Dominospiel enthaltenen Dominokreis zu stellen, die ja nur noch für ungerade n offen ist. Die Antwort liegt aufgrund des graphentheoretischen Wissens (Satz 3) auf der Hand:

Satz 4: Bei ungeradem n > 1 besteht der größte im n-Dominospiel enthaltene Dominokreis aus (n+1).(n+2)/2 - (n+1)/2, also aus $(n+1)^2 / 2$ Steinen.

Abschließende didaktische Bemerkungen zum ersten Beispiel

Die relative Einfachheit der ersten Theoriestruktur (Sätze 1 und 2) mit der klaren Fallunterscheidung in gerade und ungerade – und darin die Abwesenheit von zusätzlichen Mühen und Belästigungen durch nicht sofort integrierbare Spezialfälle – sichert baldige Erfolge für die beteiligten Jugendlichen und liefert diesen zudem ästhetische Anmutungen.

Im Sinne einer ökonomischen Darstellung der Ergebnisse könnte man auf die Idee kommen, zuerst etwas Graphentheorie zu betreiben und daran anschließend unsere Eingangsaufgabe zu stellen. Solches wäre aber im Sinne unseres Förderanliegens, das auf möglichst viel Selbstorganisation, Prozessorientiertheit und (nachträglicher!) Metakognition setzt, im höchsten Maße *kontraproduktiv*. Neben dem Reflektieren über die beiden Repräsentationen könnte man hier eventuell auch über die phantastische menschliche Fähigkeit zur Superzeichenbildung sprechen, mit der man sich zumindest etwas aus der Beschränktheit der Kapazität seines Arbeitsgedächtnisses befreien und welche man z. B. bei der Bearbeitung des ersten der nachfolgenden *weiteren (Beispiel-)Probleme aus unserem Problemfeld* gewinnbringend einsetzen kann:

Wie viele verschiedene totale n-Dominokreise gibt es jeweils – und in wie viele kleinere Dominokreise kann ein n-Dominokreis zerlegt werden?
Man legt nicht Kreise, sondern (nichtgeschlossene) Linienzüge. Was dann?
Man legt andere Figuren und nicht nur Kreise oder offene Linienzüge. Was dann?
Kann man entsprechend auch im 3-Dimensionalen agieren? – mit „Dominowürfeln"?

Zweites Beispiel eines Materials für einfache elementarmathematische Theoriebildungsprozesse

Das Beispiel ist so wie Beispiel 1 besonders für eine der ersten Sitzungen der Oberstufengruppe geeignet, aber auch schon viel früher einsetzbar.

Thema: Zahlendarstellungen mit Hilfe von Anfangsstücken der natürlichen Zahlen.

Den Teilnehmern wurde *in der ersten Sitzung als Eingangsaufgabe* vorgegeben:

Das n-te Anfangsstück (der natürlichen Zahlen) besteht aus 1, 2, 3, ...bis n.
Eine Zahlendarstellung vom Grade n einer natürlichen oder ganzen Zahl x verwendet jede Zahl des n-ten Anfangsstücks genau einmal – und jeweils nach geeigneter Wahl positiv oder negativ – und liefert daraus die dargestellte Zahl durch Summation.
Beispiele: $3 = 5 - 4 + 3 - 2 + 1$ oder $3 = 5 + 4 - 3 - 2 - 1$ mit $n = 5$;
$3 = 2 + 1$ mit $n = 2$; $1 = 2 - 1 = 5 - 4 - 3 + 2 + 1 = -5 + 4 + 3 - 2 + 1 = ...$

Es stellen sich dazu viele Fragen, z. B.:
Für welche n gibt es zu vorgegebenem x eine Darstellung vom Grade n?
Gibt es zu jedem x mindestens eine derartige Darstellung – und gibt es vielleicht sogar zu jedem x unendlich viele verschiedene solche Darstellungen? Wie findet man das zu x gehörige kleinste n, das eine Darstellung liefert? Welche und wie viele

Darstellungen von x gibt es jeweils für ein festgehaltenes n? Was verändert sich und was gilt, wenn man anstelle der Folge der natürlichen Zahlen die Folge der ungeraden Zahlen zugrunde legt? Bei welchen monoton wachsenden Folgen gibt es jeweils höchstens eine Darstellung? Was fällt Dir selbst als weitere interessante Anschlussfrage ein?

In der zweiten Sitzung wurde weitgehend nahtlos weitergearbeitet. Vorgegeben wurden nur noch zwei Beweisansätze für die Aussage:

Vom Grade n lassen sich alle z mit $z = \Delta(n) - 2k$ und $\Delta(n) \geq z \geq -\Delta(n)$ darstellen.

1. Paradigmatische Begründung , hier für $n = 7$, $\Delta(7) = 28$:
$28 = 1 + 2 + 3 + ... + 7$; $26 = -1 + 2 + ... + 7$; $24 = 1 - 2 + 3 .... + 7$; .... bis
$14 = 1 + 2 + ... + 6 - 7$; $12 = -1 + 2 ... + 6 - 7$; .... bis
$-8 = 1 + ... + 4 - 5 - 6 - 7$ ... und bis $-\Delta(7) = -28 = -1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7$
Gestalte daraus auch ein Schiebespiel, aus dem man eventuell weitere Schlüsse ziehen kann.

2. Auch mit der Gleichung $(\Delta(n) - 2k) + n+1 = \Delta(n+1) - 2k$ gelingt ein Beweis.

Für die dritte Sitzung wurden noch einige ergänzende Informationen zur Weiterarbeit im Themenfeld der letzten Sitzungen eingegeben:

Bezeichnet S die Summe der Zahlen aus dem n-ten Anfangsstück, welche mit einem Minuszeichen belegt werden, so ist die dargestellte Zahl eindeutig festgelegt durch $z = \Delta(n) - 2S$. Die Anzahl der Darstellungen von z ist zudem gleich der Anzahl der Darstellungen von S.

Nachfolgend wird für die Formalisierung ein Zusammenhang anschaulich dargeboten, der schon am Ende der letzten Sitzung vorgestellt und besprochen wurde.

Darst. von **S**	für n = 4	und	n = 5
0	0	0	
1	1	1	
2	2	2	
3	3 , 2+1	3 , 2+1	
4	4 , 3+1	4 , 3+1	
5	4+1 , 3+2	4+1 , 3+2	5+ 0
6	4+2 , 3+2+1	4+2 , 3+2+1	5+ 1
7	4+3 , 4+2+1	4+3 , 4+2+1	5+ 2
8	4+3+1	4+3+1	5+ 3 , 2+1
9	4+3+2	4+3+2	5+ 4 , 3+1
10	4+3+2+1	4+3+2+1	5+ 4+1 , 3+2
11			5+ 4+2 , 3+2+1
12			5+ 4+3 , 4+2+1
13			5+ 4+3+1
14			5+ 4+3+2
15			5+ 4+3+2+1

Formalisierung I:
Der Vektor A_4 der Darstellungsanzahlen für 0 bis 10 ist $A_4 = (1,1,1,2,2,2,2,2,1,1,1)$, der entsprechende Vektor für $n = 5$ ist $A_5 = (1,1,1,2,2,3,3,3,3,3,3,2,2,1,1,1)$. Wir lösen nun aus dem obigen paradigmatischen Beispiel – paradigmatisch, weil der allgemeine Zusammenhang ablesbar ist – die folgende „Definition durch vollständige Induktion" (= rekursive Definition) der Folge der Vektoren A_n heraus.

Anfang: $A_0 = (1)$

Induktion (von n auf n+1): $A_{n+1} = A_n—O_{n+1} + O_{n+1}—A_n$

Dabei ist O_k der Vektor aus k Nullen. Und das Verbindungszeichen „—" von zwei Vektoren bedeutet das geordnete Hintereinanderschreiben der Komponenten zu einem neuen Vektor. Beispiel: $(0,0)—(2,5,7) = (0,0,2,5,7)$.

Formalisierung II (von einer Art, die L. EULER, 1707-1783, verwendet hat):

Anfang: $P_0(x) = 1$

Induktion : $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1} * P_n(x)$

Derartige Polynome heißen „abzählende Polynome" (womit wird dabei abgezählt?)

Hinweise zur Weiterarbeit:
Besondere Eigenschaften der A_n (Länge, Summe der Komponenten, Gestalt) ? - mit Beweisen.
Eindeutigkeit der Darstellung bei anderen Folgen anstelle der natürlichen Zahlen – und was noch?

Didaktische Bemerkungen zum zweiten Beispiel:

Bei einer Verwendung im Grundschulbereich kann man in der Eingangsaufgabe danach fragen, ob man jeweils 0 und/oder 1 darstellen kann. Begabte Kinder bilden dann u. a. Gruppen (Superzeichen) aus vier unmittelbar hintereinander liegenden Zahlen, die man „zu 0 machen und wegstreichen" kann, so dass es dann nur noch darauf ankommt, ob 0, die 1, das Paar 1, 2 oder das Tripel 1, 2, 3 übrig bleibt. Sie könnten aber auch erkennen, dass man aus jeweils zwei unmittelbar benachbarten Zahlen 1 oder –1 gewinnen kann und daraus weitere Schlüsse ziehen. Außerdem gibt die Anzahl der bis n vorkommenden ungeraden natürlichen Zahlen eindeutige Hinweise darauf, ob die erlaubten Summationsergebnisse gerade oder ungerade sind. Natürlich stellen auch die Teilnehmer in der Oberstufengruppe derartige Überlegungen an. Das oben formulierte Ergebnis über die Gesamtheit aller jeweils darstellbaren Zahlen wurde von praktisch allen Teilnehmern dann auch bald gefunden, es wurden aber auch viele weitere Entdeckungen im Problemfeld gemacht, z. B. über die Darstellbarkeit mit ungeraden Zahlen.

In der zweiten Sitzung gab es eine Konzentration auf Anzahlprobleme. Dabei wurde insbesondere die Rekursion erkannt, auf die dann bei den oben wiedergegebenen Informationen für die dritte Sitzung näher eingegangen wurde, um den darin offensichtlich noch recht wenig routinierten Teilnehmern Hinweise auf Formalisierungsmöglichkeiten zu liefern, über die dann auch in der Gesamtgruppe eingehend diskutiert wurde.

Die Abschlußbesprechung der dritten Sitzung zeigte weitere erfreuliche Einsichten, u. a. die Erkenntnis, dass die Folge der Zweierpotenzen neben sehr vielen Zahlendarstellungen auch deren Eindeutigkeit liefert, also in diesem zweifachen Sinne ideale Vorgaben anbietet.

Ergänzende Bemerkungen über unser Förderkonzept:

Die Art der Aufgabenstellung und der Eingaben wird bewusst von Sitzung zu Sitzung dem momentanen Leistungsvermögen der Teilnehmer angepaßt. Deshalb sei noch einmal darauf hingewiesen:
Die vorgestellten Materialien sind beide primär für die Anfangssitzungen der Förderung in der Oberstufengruppe gedacht. Später werden größere Ansprüche gestellt, darunter auch an die Frustrationstoleranz und an die Selbständigkeit, letztere z. B. bei der eigenen Vorgabe von Anschlußproblemen.

Unser Konzept setzt auf eine gewisse Stetigkeit in der Betreuung und deshalb auf den dauernden Kontakt zwischen Förderern und Geförderten. Es unterscheidet sich auch deshalb bewußt von Aufgabenwettbewerben.

Wir haben nicht nur die Förderung im engeren Bereich der Mathematik im Sinn, sondern setzen zudem auch auf Verbesserungen im emotionalen Bereich, auf Verbesserung der sozialen Kompetenz, auf die kulturelle Einbindung der Mathematik, auf Hilfen beim Erwachsenwerden usw., im besten Sinne also auch auf Bildung. Dazu gibt es gelegentlich auch ad-hoc-Gespräche über die Sondersituationen von Begabten in ihrem Umfeld, den Zwang zu konformem Verhalten, dem man darin ausgesetzt sein kann usw. Dabei werden aber die Teilnehmer nicht nur mit Samthandschuhen angefasst. Vielmehr wird gegebenenfalls auch deutlich über unangebrachtes arrogantes Verhalten gesprochen, und vor allem und darüber hinaus gehend, dass das empfangene Geschenk einer besonderen Begabung auch eine besondere Verpflichtung dem jeweiligen Umfeld und insgesamt dann auch unserer Gesellschaft gegenüber darstellt.

Anschriften der Autoren:

Prof. Dr. Karl Kießwetter
Stormarnstr. 71a
22926 Ahrensburg

Dr. Hartmut Rehlich
Sapperweg 5
22589 Hamburg