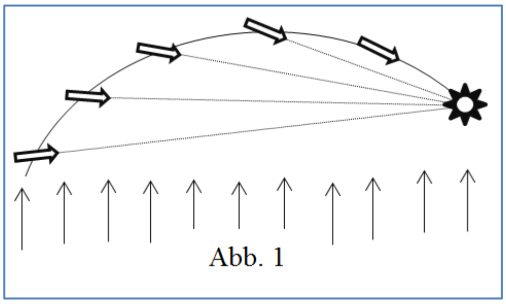
Kurse bei Strömung –

Skizze einer Modellierung und unterrichtlicher Möglichkeiten



Ein Schiff halte bei konstanter Meeresströmung stets genau auf das Ziel zu. Das heißt, dass so gesteuert wird, dass der Bug des Schiffes mit Hilfe eines sichtbaren Ziels (z. B. eines Leuchtturms) oder mit Hilfe eines Peilstrahls, stets auf das Ziel ausgerichtet ist. Das Schiff fährt dann eine sogenannte *Radiodrome*, was *Leitstrahlkurve* heißt. Ohne Strömung würde es sich also auf einer Geraden bewegen, die direkt zum Ziel führt. Mit Strömung entsteht i. A. eine gekrümmte Kurve, denn das Schiff wird durch die Strömung versetzt, der Kurs muss also ständig korrigiert werden. In einer analogen Situation befindet sich ein Flugzeug im Wind. Der Zielanflug nach dieser Strategie wird dort als „Homing“ bezeichnet. Wenn die Fahrt des Schiffes durchs Wasser schneller ist als die Meeresströmung, kann man zu jedem Ziel gelangen, sonst nicht. Mit Hilfe eines Simulationsprogramms können verschiedene Szenarien durchgespielt werden. Die folgende Abbildung zeigt auf diese Weise gewonnene Radiodromen. Es wurden verschiedene Startorte gewählt und die Spur des Schiffes über Grund wurde aufgezeichnet. Für die Simulation wurde die Geschwindigkeit des Schiffes doppelt so groß wie die Strömungsgeschwindigkeit gewählt.

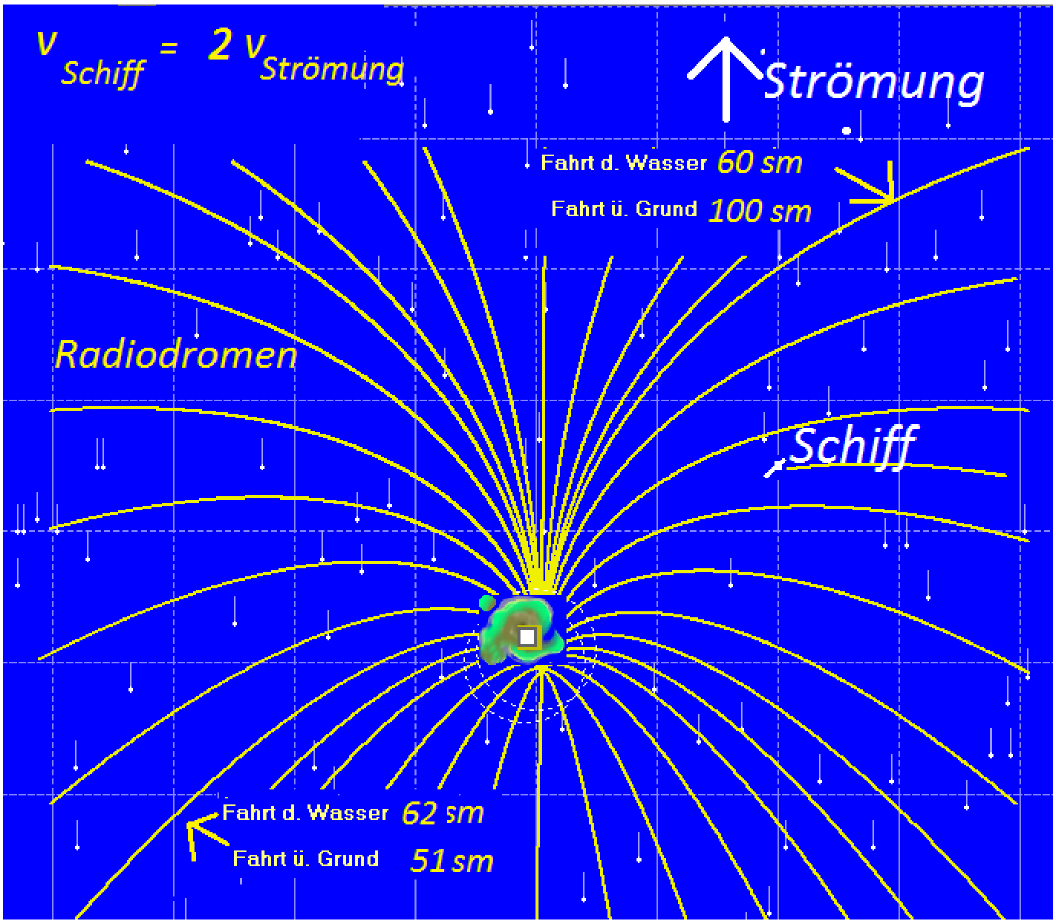


Abb. 2

1. Geometrische Konstruktion der Kurven über Grund

Für Schüler leicht durchschaubar und durchführbar ist die iterative Kurskopplung, bei der man den Kurs nicht kontinuierlich, sondern diskret korrigiert. Man macht also die Annahme, dass in kleinen Zeiteinheiten *dt* der Kurs fest sei. Um einen Fall durchzuspielen, wird die Situation in ein Koordinatensystem gelegt. Das Schiff starte bei P = (1, 1) und halte stets genau auf O = (0, 0) zu. Abb. 3 zeigt eine Graphik, die mit einer DGS (Dynageo) produziert wurde. Die Strömung habe die Richtung der y-Achse.

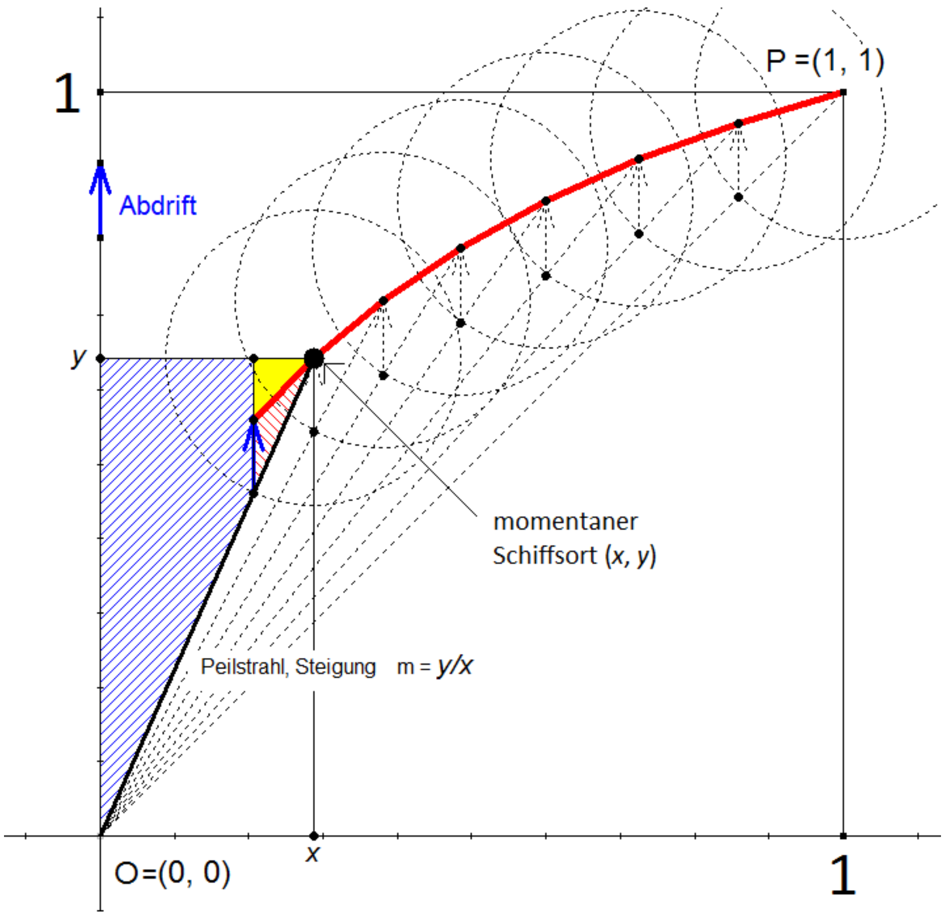


Abb. 3

Man koppelt die Schiffsorte so aneinander: Vom momentanen Schiffsort aus zieht man eine Strecke zum Zielort und trägt auf dieser den neuen Schiffsort im Wasser nach einer kleinen Zeit *dt* ab (Zirkelschlag mit frei gewähltem kleinen Radius *r*). Dann versetzt man diesen Ort um eine frei gewählte Abdrift a < *r* nach oben (Strömung ist nicht so schnell, wie das Schiff). Das Verhältnis vom Kreisradius r zu a ist also das Verhältnis der Schiffsgeschwindigkeit zur Strömungsgeschwindigkeit.

Wählt man *r* klein, so erzeugt dieses Differenzenverfahren eine hinreichend genaue Näherung an die im Grenzfall (*ständiger* Kurskorrektur) sich ergebende Kurve $y = f(x)$. In Abb.1 und 2 wurde die Strömungsgeschwindigkeit halb so groß wie die Schiffsgeschwindigkeit gewählt.

Man kann durch die Verlegung des Startortes („Ziehen des Punktes“ in der DGS) die aus der Simulation gewonnene Kurvenform auf diese Weise für viele Startorte konstruieren und natürlich auch verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten durchspielen. So entsteht Vertrautheit mit der Situation und Strategien für weitere Mathematisierungen werden vorbereitet.

2. Berechnung der Kurven

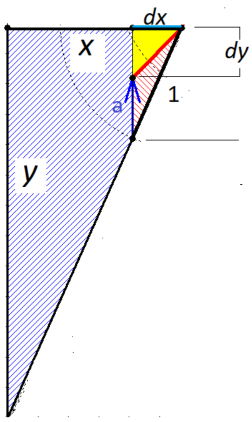
(die Kurve als Graph einer Relation oder Funktion)

Für die Grenzkurve bei ständiger Kurskorrektur soll eine Gleichung bestimmt werden. Die diskrete Konstruktion zeigt, dass die zu steuernde Richtung nur vom Schiffsort abhängt und lenkt zum Verstehen einer an die sich ergebende Kurve zu stellenden *Steigungsbedingung,* also einer Differentialgleichung erster Ordnung (weil der Kurs ganz offensichtlich eine Funktion des Ortes ist).

Herleitung der Differentialgleichung

Das Schiff starte wieder bei P = (1, 1) und halte stets genau auf O = (0, 0) zu.

Der Schiffsbuk ist auf das Fahrtziel (= der Ursprung des Koordinatensystems) gerichtet. Wenn das Schiff um die Einheitslänge 1 durchs Wasser fährt, wird es durch die Strömung (in y- Richtung) versetzt und erleidet eine Abdrift *a*, wir nehmen diese zunächst als kleiner als 1 an.



$$Kurseinheitsvektor: \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$Abdrift: \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad a > 0$$

Abb. 4

Die Schiffsbewegung zerfällt in eine horizontale und eine vertikale Komponente. Die Geschwindigkeit der Fahrt durchs Wasser setzen wir o. B. d. A. auf 1, dann ergibt sich für die Komponenten dieser Bewegung:

$dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und $dy = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - a$. Die Variable a drückt also das *Verhältnis* der Geschwindigkeiten aus. Ist a = ½, dann ist die Strömungsgeschwindigkeit also halb so groß, wie die Schiffsgeschwindigkeit. Die sich ergebende Kurve hängt von diesem Verhältnis der Geschwindigkeiten und nicht von ihrer absoluten Größe ab.Damit wissen wir nun:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - a}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y - a\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad \text{also} \quad \boxed{y' = \frac{y - a\sqrt{x^2+y^2}}{x}} \quad \text{(I)}$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung. Eine Lösung dieser DG ist sicher nicht auf Anhieb zu sehen. Naheliegend ist es, sich für diese DG Richtungsfelder anzusehen. Im Unterricht kann diese Idee anhand dieses Beispiels eingeführt werden. Die Idee des Richtungsfeldes ist so naheliegend, dass man sie im Unterricht genetisch entwickeln kann.

Wir schauen uns für zwei verschiedene a die Richtungsfelder und jeweils einen durch Iteration gewonnenen Weg an:

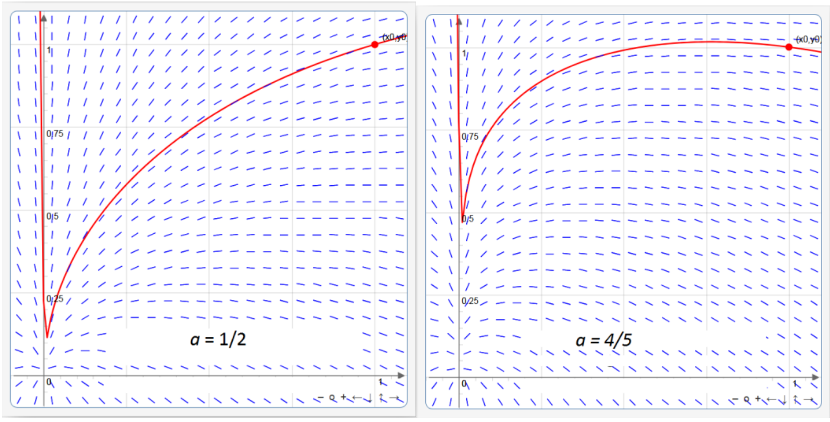


Abb. 5

Bei der starken Strömung (*a* = 4/5, also 80% der Schiffsgeschwindigkeit) wird das Schiff zunächst sogar in *y*-Richtung abgetrieben (rechts in Abb. 5).

Man kann diesen Fall und weitere auch mit der DGS anschauen. Auffallend ist die Kurve für gleiche Geschwindigkeiten (links in Abb. 6). Sie deckt sich mit einer Parabel. Nach der Behandlung der Differentialgleichung werden wir sehen, dass es sich auch tatsächlich um eine Parabel handelt.

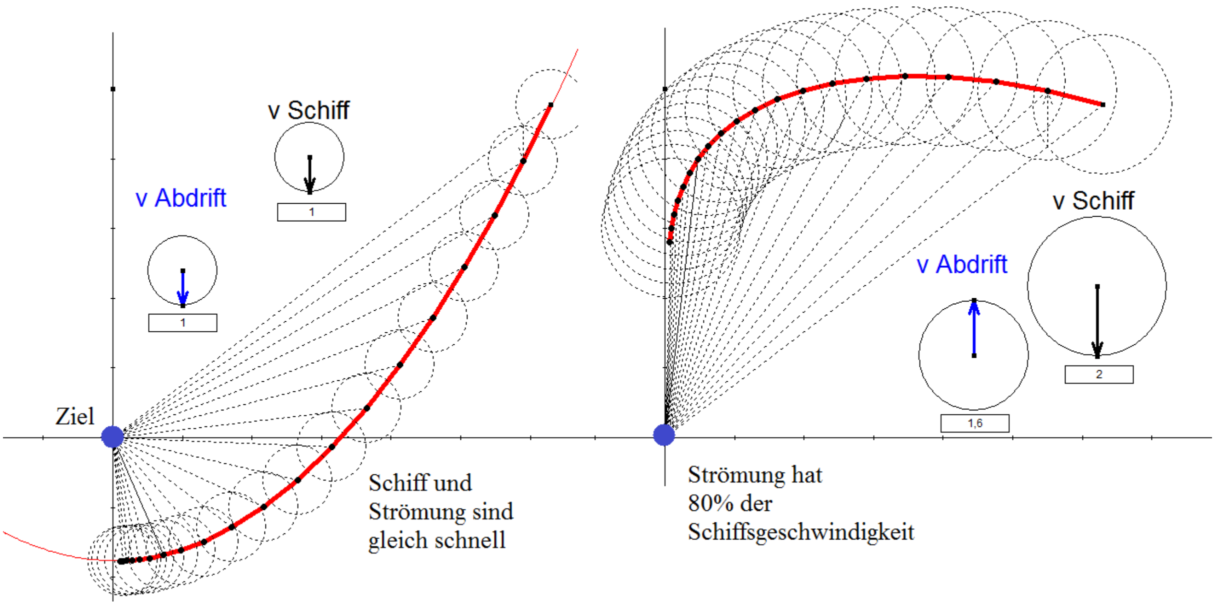


Abb. 6

Behandlung der Differentialgleichung

Bis zu dieser Stelle reicht die „normale Oberstufenmathematik“ durchaus aus. Die bisher durchgeführten Analysen sollten die Grundidee der Kurvenbestimmung anhand einer Differentialgleichung auch für alle Schüler entdeckbar, wenigstens aber verstehbar machen. Es hängt von der Lerngruppe und den Absichten des Lehrers ab, ob die nun folgenden Abschnitte auch thematisiert werden. Auf „Knackpunkte“ wird hingewiesen und es werden auch einige Andeutungen zu möglichen Hilfen bzw. Hinweisen durch den Lehrer gemacht. Natürlich könnte man auch einen einführenden Lehrervortrag halten. Ideal ist es vielleicht, wenn vorher an einfacheren Beispielen mit Differentialgleichungen gearbeitet wurde.

Eine Hürde: Das einfachste Standardverfahren funktioniert nicht

Die Gleichung (I) ist leider nicht für das Verfahren der Variablentrennung geeignet:

$$y' = \frac{y - a\sqrt{x^2 + y^2}}{x} .$$

Wenn man mit dem Term aber etwas spielt, kann man zu einer Umformung gelangen, die eine Substitution nahelegt:

$$y' = \frac{y - a\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} - a\frac{x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x} = \frac{y}{x} - a\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Setzt man $z = \frac{y}{x}$, so ist $zx = y$ und somit $y' = z'x + z$ und daher:

$$z'x + z = z - a\sqrt{1+z^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z'x = -a\sqrt{1+z^2}} \quad \text{(II)}$$

<u>Bei dieser DG lassen sich die Variablen trennen</u>.

Hilfevorschlag: Man kann also einen auf diese Idee führenden Hinweis oder einen Impuls geben.

Die Substitution führt auf relativ einfache Integrale

Man trennt also die Variablen, um integrieren zu können:

(II) $z'x = -a\sqrt{1+z^2}$ führt auf $\frac{dz}{dx}x = -a\sqrt{1+z^2}$ also $\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -a\frac{1}{x}dx$

Integration $\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz = -a\int \frac{1}{x}dx$

Die rechte Seite ist einfacher Standard: $-a\int \frac{1}{x}dx = -a\ln(x) + C$

Die linke Seite ist auch bekannt: $\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz = ar\sinh(z) = \ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$

Hilfevorschlag: Man kann die Schüler auf entsprechende Tafeln in Formelsammlungen hinweisen.

Wenn man das unbestimmte Integral der linken Seite nicht kennt und einer Formelsammlung entnimmt, <u>kann man es doch immerhin verifizieren lassen</u>, das ist eine Übung zum Ableiten.

Ableitung von $f(z)=\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$: $f'(z)=\dfrac{1+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{z+\sqrt{1+z^2}}=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{1+z^2}+z}{\sqrt{1+z^2}}\right)}{\sqrt{1+z^2}+z}=\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

Die Radiodromen als Graphen einfacher Relationen

Die Auswertung ist einfach:

$$-a\ln(x)+C=\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) \qquad \rightarrow \qquad e^C\cdot x^{-a}=z+\sqrt{1+z^2}$$

Rücksubstitution und $k=e^C$ liefert:

$$e^C\cdot x^{-a}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{k\cdot x^{1-a}=y+\sqrt{x^2+y^2}} \text{ (III)}$$

Damit sind implizite Darstellungen der Radiodromen als Graphen von Relationen gefunden. Man kann diese Lösung nun verifizieren (bei den Umformungen haben wir, wie üblich, in dem Sinne heuristisch gearbeitet, dass wir keine Begründungen zur Berechtigung der einzelnen Umformungsschritte angeführt haben).

Man kann auch hier wieder die Lösung verifizieren, das ist für die Schüler eine Übung zum Ableiten und – was die Termumformungen betrifft – eine Konzentrationsübung. Sie müssen die Übersicht auch bei komplizierten Termumformungen behalten.

Drei besonders einfache Spezialfälle

a) Für den oben betrachteten Fall, dass das Schiff doppelt so schnell wie die Strömung ist, wird Gleichung (III) einfach.

Es sei also $a=\dfrac{1}{2}$ und $(1,1)$ sei Kurvenpunkt.

Aus $k\cdot x^{1-a}=y+\sqrt{x^2+y^2}$ wird $k\cdot\sqrt{x}=y+\sqrt{x^2+y^2}$. Die Forderung, dass (1, 1) Kurvenpunkt sei, führt auf $k=\sqrt{2}+1$.

Diese Gleichung kann nach y aufgelöst werden:

$$y+\sqrt{y^2+x^2}=c\cdot\sqrt{x} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2+y^2}=k\sqrt{x}-y \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=k^2x-2k\sqrt{x}+y^2$$

$$\Rightarrow x^2=c^2x-2k\sqrt{x}y \quad\Rightarrow\quad y=\frac{k^2x-x^2}{2k\sqrt{x}}=\frac{k}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2k}x\sqrt{x}$$

Also: $\boxed{y=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot x\sqrt{x} \;+\; \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\cdot\sqrt{x}}$

Der Graph:

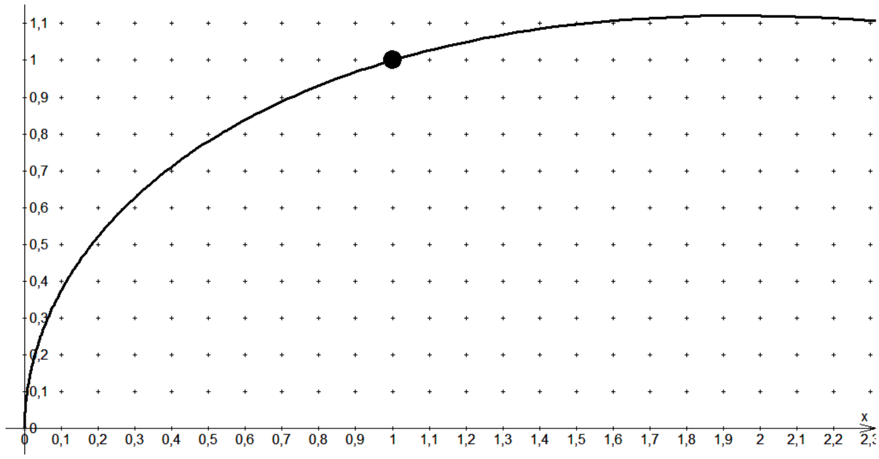


Abb. 7

Wir erhalten den vertrauten Verlauf und haben den Graph auch etwas weiter rechts dargestellt.

b) Der Fall, dass Schiff und Strömung gleich schnell sind, ist ebenfalls ein sehr interessanter Sonderfall (vgl. Abb. 6). In Gleichung (III) verschwindet dann nämlich x auf der linken Seite und man erhält:

$$k = y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow \quad k - y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 2ky = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = \frac{-1}{2k} x^2 + \frac{k}{2}}$$

In diesem Fall sind die Bahnkurven also Graphen von Parabeln. Das Schiff, auf einem Ast startend, bewegt sich auf den Scheitel der Parabel zu, ohne diesen jemals zu erreichen. Die Simulation zeigt einige Kurse:

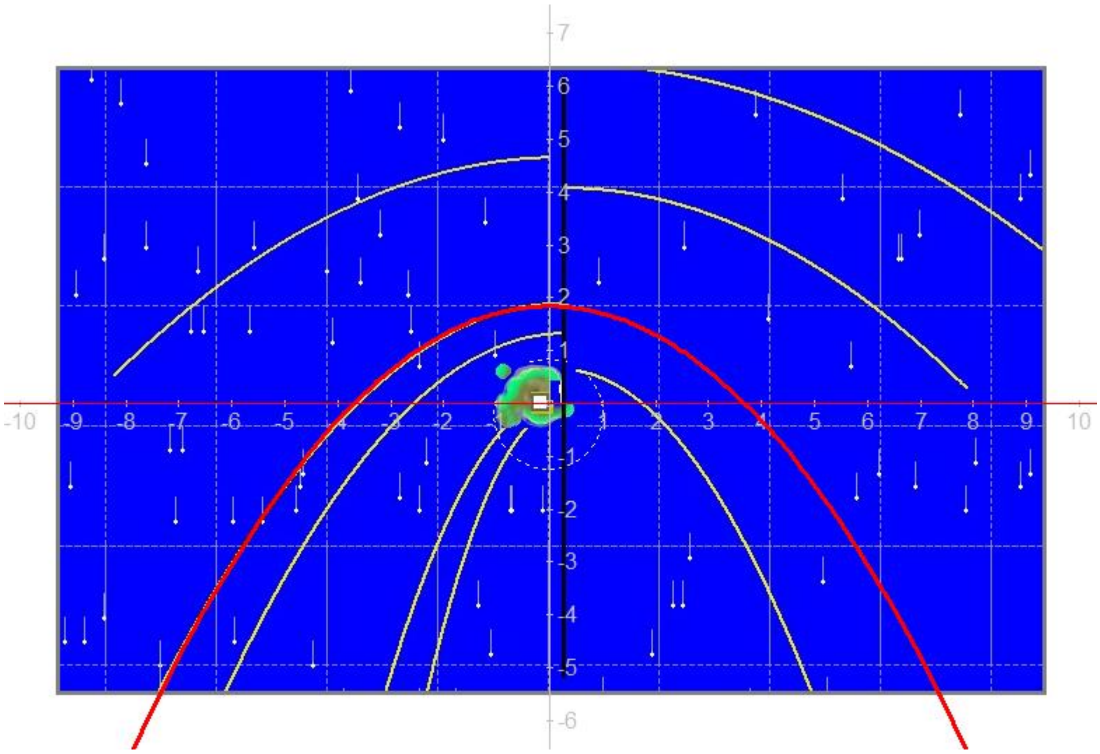


Abb. 8

Man kann nun das mit Hilfe der Simulation gewonnene Kursbild mit einem Funktionsplotter überprüfen. Diese Prüfung ist besonders einfach, wenn man einen Plotter benutzt, in den ein Hintergrundbild geladen werden kann, wie z. B. Dynageo (rote Kure in Abb. 8).

c) Ohne Strömung muss man Ursprungsgeraden erhalten. Dies zu verifizieren, hat den Charakter einer *Probe*, denn das sich Geraden ergeben müssen, ist ja trivial:

$k \cdot x^{1-a} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ wird zu $k \cdot x = y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad (kx - y)^2 = x^2 + y^2$

also $(k^2 - 1)x^2 - 2kxy = 0 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{k^2 - 1}{2k} x$.

Der allgemeine Fall

Gleichung (III) $\boxed{k \cdot x^{1-a} = y + \sqrt{x^2 + y^2}}$ soll nach y aufgelöst werden um zu einer Funktionsgleichung zu gelangen.

$k \cdot x^{1-a} - y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad k^2 \cdot x^{2-2a} - 2kx^{1-a} y = x^2 \quad \rightarrow \quad 2kx^{1-a} = k^2 x^{2-2a} - x^2$

und endlich: $\boxed{y = \dfrac{k}{2} x^{1-a} - \dfrac{1}{2k} x^{1+a}}$ (IV)

Da wir an keiner Stelle der Herleitung (insbesonder beim Integrieren) Einschränkungen hinsichtlich des Wertebereichs der Parameter machen mussten (bis auf die Forderung, dass *k* positiv sei wegen $k = e^C$), haben wir damit den Fall für beliebige Verhältnisse der Strömungsgeschwindigkeit zur Schiffsgeschwindigkeit beschrieben. Die Strömungsrichtung kann o.B.d.A. als *y*-Achsenrichtung angesehen werden.

Die letzte Abbildung zeigt Beispiele für verschiedene *a*. Für alle Kurven ist $k = \sqrt{2} + 1$. Diese Parameterwahl stellt sicher, dass (1, 1) Kurvenpunkt ist.

Man kann sechs verschiedene Bereiche für den Parameter *a* unterscheiden:

$a > 1$: Die Strömung ist schneller als das Schiff und in y-Achsenrichtung. Das Schiff kann das Ziel nicht erreichen, es treibt – sich asymptotisch der y-Achse annähernd – in y-Richtung weg.

$a = 1$: Strömung und Schiff haben die gleiche Geschwindigkeit. Das Schiff erreicht das Ziel nicht, es bewegt sich auf einem Parabelast, und nähert sich einem Punkt auf der y-Achse beliebig nah an.

$0 < a < 1$: Das Schiff ist schneller als die Strömung, es erreicht sein Ziel, der Kurs wird ständig nach Backbord korrigiert.

$a = 0$: Keine Strömung, der Kurs ist eine Gerade

$0 > a > -1$: Das Schiff ist schneller als die Strömung, die Strömung kommt nun aus der anderen Richtung. Das Schiff erreicht sein Ziel, der Kurs wird ständig nach Steuerbord korrigiert.

$a = -1$: Strömung und Schiff haben die gleiche Geschwindigkeit, die Strömung kommt nun aber aus der anderen Richtung. Das Schiff erreicht das Ziel nicht, es bewegt sich auf einem Parabelast, und nähert sich einem Punkt auf der y-Achse beliebig nah an.

$a < -1$: Die Strömung ist schneller als das Schiff und in Gegenrichtung der y-Achse. Das Schiff kann das Ziel nicht erreichen, es treibt – sich asymptotisch der y-Achse annähernd – in Gegenrichtung zur y-Richtung weg.

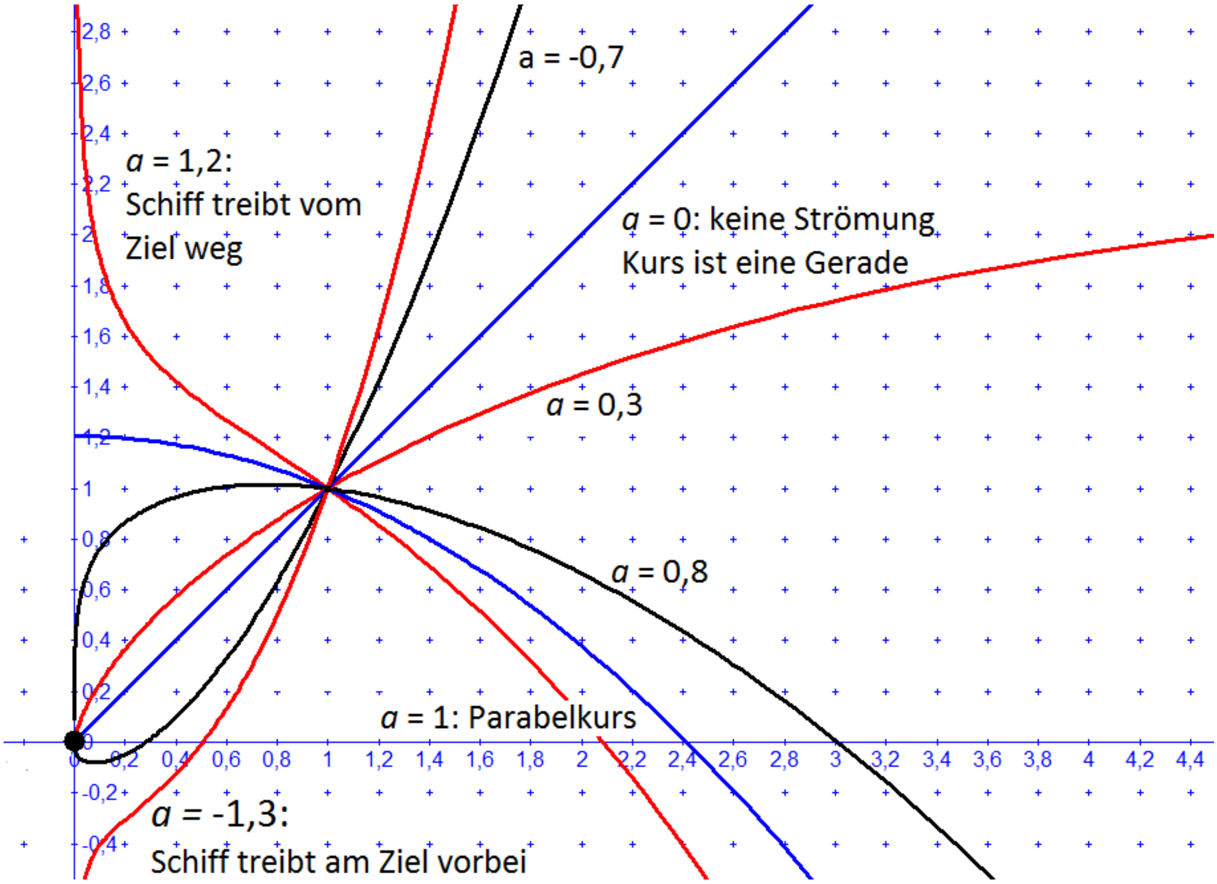


Abb. 9

Das Simulationsprogramm kann von meiner Internetseite

http://www.remath.de/xhomepage/Abdrift/Abdrift.HTM

heruntergeladen werden. Es ist Freeware